第二节　聚点, 内点, 界点

设 E 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, P_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个定点,

定义 1 如果存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$, 使 $U(P_0) \subset E$, 则称 P_0 为 E 的内点; 如果 P_0 是 E^c 的内点, 则称 P_0 为 E 的外点; 如果 P_0 既非 E 的内点又非 E 的外点, 也就是: P_0 的任意一个邻域内既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点, 则称 P_0 为 E 的界点或边界点.

定义 2 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一点集, P_0 为 $\mathbf{R}^n$ 中一定点, 如果 P_0 的任意一个邻域内部都含有无穷多个属于 E 的点, 则称 P_0 为 E 的一个聚点.

显然, 有限集没有聚点; E 的内点必为 E 的聚点, 但 E 之聚点却不一定是 E 的内点, 因为还可能是 E 的边界点; E 之内点一定属于 E, 但 E 的聚点则可以属于 E 也可以. 不属于 E.

定理 1 下面的三个陈述是等价的:

(1)P_0 是 E 的聚点;

(2)P_0 的任一邻域内, 至少含有一个属于 E 而异于 P_0 的点;

(3) 存在 E 中互异的点所成点列 P_n, 使 $P_n \to P_0 (n \to 0)$.

证明 由 (1) 推出 (2) 及由 (3) 推出 (1) 是显然的.

现证由 (2) 推出 (3). 假设 $P_1 \in U(P_0, 1)$ 且 P_1 异于 P_0, 令 $\delta_1 = \min\{d(P_1, P_0), \frac{1}{2}\}$, 则在 $P_2 \in U(P_0, \delta_1)$ 且 P_2 异于 P_0, 令 $\delta_2 = \min\{d(P_2, P_0), \frac{1}{3}\}$, 则在 $P_3 \in U(P_0, \delta_2)$ 且 P_3 异于 P_0, 这样无限继续下去, 便得到点列 $\{P_n\}$, 它显然满足要求. ■

定义 3 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一点集, P_0 为 $\mathbf{R}^n$ 中一定点, 如果 P_0 属于 E 但不是 E 的聚点, 则 P_0 称为 E 的**孤立点**.

由定理 1 可知: P_0 是 E 的孤立点的充分必要条件是: 存在 P_0 的某邻域 $U(P_0)$, 使 $E \cap U(P_0) = \{P_0\}$.

E 的界点不是聚点便是孤立点. 所有 $\mathbf{R}^n$ 中的点, 对 E 来说又可分为聚点, 孤立点, 外点三种.

$$\mathbf{R}^n\text{中的点 (对 E 来说)}\begin{cases}\text{内点}\\ \text{界点,}\\ \text{外点}\end{cases} \quad \text{或} \begin{cases}\text{聚点}\\ \text{孤立点,}\\ \text{外点}\end{cases}$$

注意: 对一个具体的点集 E 来说, 上述任何分类中的三种点不一定都出现. 界点或聚点可以属于 E, 也可以不属于 E.

定义 4 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个点集, 有

(1)E 的全体内点所成的集合, 称为 E 的开核, 记为 $\mathring{E}$, 即

$$\mathring{E} = \{x : x\text{是}E\text{的内点}\} = \{x : \exists U(x) \subset E\};$$

(2)E 的全体聚点所成的集合, 称为 E 的导集, 记为 E', 即

$$E' = \{x : \text{对}\forall U(x), \quad U(x) \cap E \setminus \{x\} \neq \varnothing\};$$

(3)E 的全体界点所成的集合, 称为 E 的边界, 记为 ∂E, 即

$$\partial E = \{x : \text{对}\forall U(x), \quad U(x) \cap E \neq \varnothing, \quad U(x) \cap E^c \neq \varnothing\};$$

(4)$E \bigcup E'$ 称为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$, 由 (2),

$$\overline{E} = \{x : \text{对}\forall U(x), \quad U(x) \cap E \neq \varnothing\}.$$

闭包也可以表示为其他形式, 例如:

$$\overline{E} = E \cup \partial E = \overset{\circ}{E} \cup \partial E = E' \cup \{E\text{的全体孤立点}\}.$$

闭包各种说法的本质在于: E 含且仅含 $\mathbf{R}^n$ 中所有这种点 P: 在 P 的任一邻域内都至少有一点属于 E. 由于闭包的这个特征, 立刻可得闭包与开核的对偶关系:

$$(\overset{\circ}{E})^c = \overline{E^c}, \qquad (\overline{E})^c = \overset{\circ}{E^c}.$$

定理 2 设 $A_1 \subset A_2$, 则 $A_1' \subset A_2'$, $\overset{\circ}{A}_1 \subset \overset{\circ}{A}_2$, $\overline{A}_1 \subset \overline{A}_2$.

定理 3 $(A \bigcup B)' = A' \bigcup B'$.

注意 $(A \bigcup B)^\circ = \overset{\circ}{A} \bigcup \overset{\circ}{B}$ 未必成立, 但 $(A \bigcap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \bigcap \overset{\circ}{B}$.

定理 3 的证明 因为 $A \subset A \bigcup B$, $B \subset A \bigcup B$, 故从定理 2, $A' \subset (A \bigcup B)'$, $B' \subset (A \bigcup B)'$. 从而 $A' \bigcup B' \subset (A \bigcup B)'$. 另一方面, 假设 $P \in (A \bigcup B)'$, 则必有 $P \in A' \bigcup B'$. 否则, 若 $P \notin A' \bigcup B'$, 那么将有 $P \notin A'$ 且 $P \notin B'$. 因而有 P 的某一邻域 $U_1(P)$, 在 $U_1(P)$ 内除 P 外不含 A 的任何点, 同时有 P 的某一邻域 $U_2(P)$, 在 $U_2(P)$ 内除 P 外不含 B 的任何点, 则由邻域基本性质 (3) 知, 存在 $U_3(P) \subset U_1(P) \bigcap U_2(P)$, 在 $U_3(P)$ 中除 P 点外不含 $A \bigcup B$ 中的任何点, 这与 $P \in (A \bigcup B)'$ 的假设矛盾. ■

例 1 设 $A \subset \mathbf{R}^1$ 为非空集, 求证

i) 若 A 是孤立点集 (即 A 的每一点都是 A 的孤立点), 则 $\overline{\overline{A}} \le a$.

ii)$\overline{\overline{A \setminus A'}} \le a$.

iii) 若 $\overline{\overline{A'}} \le a$, 则 $\overline{\overline{A}} \le a$.

证明 i) 由于 A 是孤立点集, 所以对于任意的 $x \in A$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x)\bigcap A = \{x\}$, 于是对于任意的 $x, y \in A$, 当 $x \neq y$ 时 $(x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2})\bigcap(y-\frac{\delta_y}{2}, y+\frac{\delta_y}{2}) = \emptyset$ 取有理数 $r_x \in (x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2})$, 令 $\varphi(x) = r_x$, 则 φ 是一个从 A 到 Q 中的一一对应. 故 $\overline{\overline{A}} \le a$.

ii) 显然 $A \setminus A'$ 若非空, 必为孤立点集.

iii) 显然 $A \subset (A \setminus A')\bigcup A'$. 由 ii) 可知, $\overline{\overline{A \setminus A'}} \le a$. , 故 $\overline{\overline{A}} \le a$. ■

下面的定理告诉我们什么时候 $E' \neq \varnothing$.

定理 4(Bolzano-Weierstrass 定理) 设 E 是一个有界的无限集合, 则 E 至少有一个聚点.

证明方法与数学分析中在 $\mathbf{R}^1$ 与 $\mathbf{R}^2$ 时的证明相同, 在此略去.

定理 5 设 $E \neq$, $E \neq \mathbf{R}^n$, 则 E 至少有一界点 (即 $\partial E \neq \varnothing$).

证明 因为 $\bar{E} = E^o \bigcup \partial E$, 如果 $\partial E = \varnothing$, 则 $\bar{E} = E^o$. 我们知道 $E^o \subset E \subset \bar{E}$, 于是 $E^o = E = \bar{E}$, E 是既开又闭的, $E =$, 或者 $E = \mathbf{R}^n$.

作业:

P35 习题 1, 2, 3, 9(1)