第一节 度量空间, n 维欧氏空间

定义: 设 X 是一个集合, 若对于 X 中任意两个元素 x, y, 都有唯一确定的实数 $d(x, y)$ 与之对应, 而且这一对应关系满足下列条件:

(I). $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0$ 的充要条件为 $x = y$;

(2). $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, 对任意 z 都成立,

则称 $d(x, y)$ 是 x, y 之间的距离, 称 (X, d) 为度量空间或距离空间. X 中的元素称为点, 条件 (2) 称为三点不等式.

距离 d 有对称性, 即 $d(x, y) = d(y, x)$.

实际上, 在三点不等式中取 $z = x$, 并由条件 I. 知 $d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x)$. 由于 z 和 y 的次序是任意的, 故同样可证 $d(y, x) \leq d(x, y)$.

如果 (X,d) 度量空间, Y 是 X 的一个非空子集, 则 (Y,d) 也是一个度量空间, 称为 (X,d) 的子空间.

对 $\mathbf{R}^n$ 中任两点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)$, 规定距离

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证 $d(x,y)$ 满足距离的条件.

$(\mathbf{R}^n,d)$ 称为n 维欧氏空间, 其中 d 称为欧几里得距离.

此外, 在 $\mathbf{R}^n$ 中还可以用下面方法定义其他的距离:

$\rho'(x,y)=\max_i|\xi_i-\eta_i|$; $\quad \rho''(x,y)=\sum_{i=1}^n|\xi_i-\eta_i|$.

容易验证 ρ', ρ'' 也满足距离条件 (1) 和 (2).

下面我们将考察 $\mathbf{R}^n$ 中的极限、开集、闭集、紧集等一系列概念，它们的基础都是邻域，而邻域则依靠距离即可作出.

定义 1 $\mathbf{R}^n$ 中所有到定点 P_0 的距离小于定数 $\delta > 0$ 的点的全体，即集合 $\{P|\ d(P,P_0) < \delta\}$ 称为点 P_0 的 δ 邻域，并记为 $U(P_0,\delta)$. P_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

在不需要特别指出半径时，也说是 P_0 的一个邻域，记作 $U(P_0)$.

容易证明邻域具有下面的基本性质:

(1)$P \in U(P)$;

(2) 对于 $U_1(P)$ 和 $U_2(P)$，存在 $U_3(P) \subset U_1(P) \bigcap U_2(P)$;

(3) 对于 $Q \in U(P)$，存在 $U(Q) \subset U(P)$;

(4) 对于 $P \neq Q$，存在 $U(P)$ 和 $U(Q)$，使 $U(P) \bigcap U(Q) = \varnothing$.

定义 2 设 $\{P_n\}$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中一点列, $P_0 \in \mathbf{R}^m$, 如果当 $n \to \infty$ 时有 $d(P_n, P_0) \to 0$, 则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 或 $P_n \to P_0\ (n \to \infty)$.

用邻域的术语来说, 就是: 对于 P_0 的任一邻域 $U(P_0)$, 存在某个自然数 N, 使当 $n > N$ 时, $P_n \in U(P_0)$.

定义 3 两个非空的点集 A、B 的距离定义为 $d(A,B) = \inf\limits_{P\in A, Q\in B} d(P,Q)$.

定义 4一个非空点集 E 的直径定义为 $\delta(E) = \sup\limits_{P\in E, Q\in E} d(P,Q)$.

定义 5 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中一点集, 如果 $\delta(E) < \infty$, 则称 E 为有界点集 (空集也作为有界点集).

显然, E 为有界点集的充要条件是存在常数 K, 使对于所有的 $x = (x_1, x_2, \cdot$
E, 都有 $|x_i| < K(i = 1, 2, \cdots, n)$. 即存在常数 K, 对所有 $x \in E$ 有 $d(x, 0) < K$, 这里 $0 = (0, 0, \cdots, 0)$, 称为 n 维空间的原点.

定义 6 点集 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 称为一个开区间 (n 维), 如将其中不等式一律换成 $a_i \leq x_i \leq b_i$ 或 $a_i < x_i \leq b_i$ 则称之为一个闭区间或左开右闭区间. 当上述各种区间统称为区间, 记作 I.$b_i - a_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 称为 I 的第 i 个" 边长", $\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ 称为I 的" 体积", 记为 $|I|$.

作业:

P35 习题 4