第四节　不可测集

对任一实数 α, 作 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的映射 $\tau_\alpha : x \to x + \alpha$. 经过平移 α 后所得的集记为 $\tau_\alpha E = \{x + \alpha | x \in E\}$.

定理　对任何集 $E \subset \mathbf{R}$, 具有 $m^*(E) = m^*(\tau_\alpha E)$, 且当 E 为 L 可测时, $\tau_\alpha E$ 也为 L 可测的.

定理说明, 集 $E \subset \mathbf{R}$ 经过平移后, 它的外测度不变, 而 L 可测集经过平移后仍为 L 可测集 (当然它的测度也不变). 这个性质称为Lebesgue 测度的平移不变性.

用类似的方法还可以证明Lebesgue 测度的反射不变性, 就是说, 如果记 τ 是 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的如下映射 $\tau_\alpha : x \to -x, \quad \tau E = \{-x | x \in E\}$, 那么对任何 L 可测集 E, $mE = m(\tau E)$.

下面利用测度的平移不变性作一个不可测集.

想法: 在直线上造一个集 Z, 对于 Z, 可取一列数 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$, 使得 Z 经平移 τ_{r_n} 后得到的集 $Z_n = \tau_{r_n} Z$ 有下面的性质:

(1). $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ 包含一个区间(例如 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n \supset [0, 1]$);

(2). Z_n 是一列互不相交的集, 而且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ 是有界集(例如 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n \subset [-1, 2]$).

如果 Z 具有这样两条性质, 那么 Z 就一定不是 L 可测集.

现在我们具体地构造这样的集 Z.

将 [0,1] 中的所有数依下法分类: 两数 ξ,η 当且仅当 $\xi-\eta$ 是有理数时, 称 ξ 与 η 属于同一类. 可以证明不同的两类 $E(\xi)$ 和 $E(\eta)$ 是不相交的.

把 [0,1] 区间分解成一族两两不交的集的并集, 在每类 (集) 中选取且只选取一个代表数组成一个集 Z. 换句话说, 对任何 $\xi\in[0,1], E(\xi)\bigcap Z$ 是一个单元素集合.

下证 Z 是不可测集. 事实上, 把 [0,1] 中的全体有理数排成一列 $r_1, r_2, \cdots$, 并记 $Z_n=\tau_{r_n}Z$. 可以证明 Z_n 具有前面说的性质 (1) 和 (2).

(1). $[0,1]\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n$;

(2). Z_n 这一列集是两两不相交的, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n\subset[-1,2]$.

注意: 如果我们不是从闭区间 [0,1] 出发, 而是从任何一个具有正测度的集 E 出发, 施行同样的手续, 那么就知道 E 中存在不可测的子集 Z. 因此, 凡具有正测度的集必含有不可测的子集.

能否给出另一种测度, 使得对于 $\mathbf{R}$ 中的任何子集都有测度可言, 即任何子集都可测? 答案是否定的.

然而如果退一步, 只要求有限可加, 那么在 $\mathbf{R}^1$ 和 $\mathbf{R}^2$ 存在着巴拿赫 (Banach) 测度, 使得任何子集都可测. 这就是 1923 年 Banach 证明: 在 $\mathbf{R}^1$ 和 $\mathbf{R}^2$ 上, 存在着正则的 (即 [0,1] 的测度是 1)、有限可加的、对运动不变的测度, 使得任何子集均可测.

作业:

P36 习题 16