第三节 可测集类

定理 1 (1) 凡外测度为零之集皆可测, 称为零测度集.

(2) 零测度集之任何子集仍为零测度集.

(3) 有限个或可数个零测度集之和集仍为零测度集.

定理 2. 区间 I(不论开、闭或半开半闭区间) 都是可测集合, 且 $mI = |I|$.

定理 3 凡开集、闭集皆可测.

定义 1 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中某些集合所成的非空集族. 如果

(1) $\emptyset \in \Omega$; (2) 若 $E \in \Omega$, 则 $E^c \in \Omega$; (3) 若 $E_k \in \Omega$, 则 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Omega$

则称 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一个σ 代数.

由 (1) 和 (2) 可知 $\mathbf{R}^n \in \Omega$.

注记 1. σ 代数对于可数并及作差运算是封闭的, 由德摩根公式知, 对可数交及取余集运算也是封闭的,

注记 2. 由上节及本节定理 2 讨论可知, $\mathbf{R}^n$ 中可测集全体所成的集合类 $\mathscr{M}$ 是一 σ 代数.

注记 3. 由 σ 代数定义易知: 如果 $\{\Omega_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上一族 σ 代数, 则它们的交集 $\bigcap \Omega_\alpha$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 上的 σ 代数.

定义 2 设 Σ 是 $\mathbf{R}^n$ 中某些集合所组成的集族. 称 $\mathbf{R}^n$ 上所有包含 Σ 的 σ 代数的交集为由 Σ 生成的 σ 代数.

定义 3 由 $\mathbf{R}^n$ 中所有开集所生成的 σ 代数记为 $\mathscr{B}$ 称为博雷尔 (Borel) 代数, 并称 Borel 代数 $\mathscr{B}$ 中的集合为Borel 集.

例子: (1) 空集肯定是 Borel 集；(2) 开集一定是 Borel 集；

(3) 开集的余集 (闭集)、任意个开集的并集、可数个开集的交集、任意个闭集的交集、可数个闭集的并集, 都是 Borel 集.

定理 4 凡 Borel 集都是 Lebesgue 可测集.

定义 4 若 G 可表为一列开集 $\{G_i\}$ 之交 $G = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, 称 G 为G_δ 型集.

设集合 F 可表为一列闭集 $\{F_i\}$ 之和集: $F = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, 则 F 称为$F_\sigma$ 型集.

显然 G_δ 型集及 F_σ 型集都是 Borel 集.

根据 Borel 集的定义, Borel 集全体已构成一个 σ 代数. 但是可以证明, 并非每个 L 可测集都是 Borel 集.

定理 5 设 E 是任一可测集, 则一定存在 G_δ 型集 G, 使 $G \supset E$, 且 $m(G-E)=0$.

证明 (1) 先证: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 G, 使 $G\supset E$, 且 $m(G-E)<\varepsilon$.

(2) 依次取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$, 由证明中的 (1) 存在开集 $G_n\supset E$, 使 $m(G_n-E)<\frac{1}{n}$ 令 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 则 G 为 G_δ 型集, $G\supset E$, 且

$$m(G-E)\le m(G_n-E)<\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots.$$

故 $m(G-E)=0$. ■

定理 6 设 E 是任一可测集，则一定存在 F_σ 型集 F，使 $F \subset E$，且 $m(E-F)=0$.

证明 因 E^c 也可测，由定理 5 存在 G_δ 型集 $G \supset E^c$，使 $m(G-E^c)=0$. 令 $F=G^c$，则 F 为 F_σ 型集，$F \subset E$，且

$$m(E-F)=m(E-G^c)=m(G-E^c)=0.$$

证毕. ■

定理 7. 设 E 是一个可测集，则

(1)$mE=\inf\{mG : E \subset G,\ G\text{是开集}\}$(外正规性);

(2)$mE=\sup\{mK : K \subset E,\ K\text{是紧集}\}$(内正规性).

定理 8 . 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $m^*E < \infty$. 若

$$\inf\{mG : E \subset G,\ G\text{是开集}\} = \sup\{mK : K \subset E,\ K\ \text{是紧集}\}.$$

则 E 可测.

证明 设 $\inf\{mG : E \subset G, G\text{开集}\} = \sup\{mK : K \subset E, K\text{紧集}\} = \alpha.$ 对于任意的正整数 n, 存在开集 G_n 和紧集 K_n, 使得 $K_n \subset E \subset G_n$, 且 $mG_n < \alpha + \frac{1}{2n}$, $mK_n > \alpha - \frac{1}{2n}$, 故有 $m(G_n - K_n) < \frac{1}{n}$. 取 $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, 则 K 是 F_σ 集,

$$m(E-K) \leqslant m(G_n - K_n) < \frac{1}{n},$$

对所有的正整数成立, 因此 $m(E-K) = 0$. 故 E 是可测集.■

推论. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 则 E 是 Lebesgue 可测集的充分必要条件是存在两列可测集 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$, 使得 $A_n \subset E \subset B_n$, 且 $\lim_{n\to\infty} m(B_n - A_n) = 0$.

例 1 设 $E \subset \mathbf{R}^p$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使 $m^*(G - E) < \varepsilon$, 则 E 是可测集.

证明 对任何正整数 n, 由条件存在开集 $G_n \supset E$, 使 $m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$. 令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 则 G 是可测集, 又因

$$m^*(G - E) \leq m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$$

对一切正整数 n 成立, 因而 $m^*(G - E) = 0$, 即 $M = G - E$ 是一零测度集, 故也可测. 由 $E = G - (G - E)$ 知 E 可测. 证毕. ∎

把一集合分解成一零测度集与一已知可测集的并或差来证明该集合可测是一种常用的技巧.

例 2 设 $E \subset \mathbf{R}^p$, 求证存在 G_δ 型集 $G \subset \mathbf{R}^p$, 使得 $E \subset G$ 且 $mG = m^*E$.

证明 不妨设 $m^*E < +\infty$(否则令 $G = \mathbf{R}^p$ 即可). 对任意的正整数 n, 由外测度定义, 存在开集 G_n(一列开区间的并), 使得 $E \subset G_n$, 且 $mG_n < m^*E + \frac{1}{n}$. 令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 则 $E \subset G$ 且 G 为 G_δ 型集. 由对任何正整数 n 有

$$m^*E \leq mG < m^*E + \frac{1}{n},$$

令 $n \to \infty$ 即得 $mG = m^*E$. 证毕. ■

例 2 中的 G_δ 型集 G 称为 E 的可测包. 利用可测包可把还未知是否可测的集合的测度问题转化为可测集的测度问题, 以便利用可测集的一系列性质.

作业:

P52 习题 8, 9, 10, 11