第二节　可测集

外测度 m^*E 的一个优点是任何集合都有外测度, 但是外测度只具有次可数可加性, 不具有可数可加性.

设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 如果 $E \in \mathscr{M}$, 由于 $\mathbf{R}^n$ 中任何开区间 I 都属于 $\mathscr{M}$, 由 $\mathscr{M}$ 的运算封闭性, 则 $I \cap E, I \cap E^c$ 都应该属于 $\mathscr{M}$. 但由 $(I \cap E) \cap (I \cap E^c) = \varnothing$, $(I \cap E) \cup (I \cap E^c) = I$, 所以由 (1) 式, 应该成立

$$m^*I = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c). \tag{2}$$

反之, 若存在某个开区间 I, 使 (2) 式不成立, 则 E 自然不应该属于 $\mathscr{M}$.

由上可见, 对于 $\mathbf{R}^n$ 中点集 E 是否属于 $\mathscr{M}$, 我们可以用 (2) 式是否对 $\mathbf{R}^n$ 中的任何开区间成立来判断.

引理 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 则 (2) 式对 $\mathbf{R}^n$ 中任何开区间都成立的充要条件是对 $\mathbf{R}^n$ 中的任何点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c). \tag{3}$$

由上述引理, 现在可以给出 $\mathbf{R}^n$ 中集合属于 $\mathscr{M}$ 的定义. 这个定义是由卡拉泰奥多里 (Carathéodory) 给出的.

定义 1. 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, 如果对任一点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称E 是 L 可测的. 这时 E 的 L 外测度 m^*E 即称为 E 的 L 测度, 记为 mE. 可测集全体记为 $\mathscr{M}$.

注记: 由于总有 $m^*T \leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$. 故通常只须验证反向的不等式.

定理 1. 集合 E 是可测的充要条件是对于任意 $A \subset E, B \subset E^c$, 总有

$$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B.$$

定理 2. S 可测等价于 S^c 可测.

定理 3. 设 S_1, S_2 都可测, 则 $S_1 \cup S_2$ 也可测, 并且当 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ 时, 对于任意集合 T 总有

$$m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)] = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2).$$

推论 1 设 $S_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 都可测, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$ 也可测, 并且当 $S_i \cap S_j = \varnothing (i \neq j)$ 时, 对于任意集合 T 总有

$$m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{n} S_i)) = \sum_{i=1}^{n} m^*(T \cap S_i).$$

定理 4. 设 S_1, S_2 都可测, 则 $S_1 \cap S_2$ 也可测.

推论 2. 设 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都可测, 则 $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ 也可测

定理 5: 设 S_1, S_2 都可测, 则 $S_1 - S_2$ 也可测.

定理 6: 设 $\{S_i\}$ 是一列互不相交的可测集, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 也是可测集, 且

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} mS_i. \tag{7}$$

推论 3. 设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 也是可测集合

定理 7: 设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ 也是可测集合.

由前面几个定理及推论可知: L 可测集对于作可数和及作交, 作差的运算是封闭的, 并且 L 测度是具有可数可加性的测度.

定理 8 : 设 $\{S_i\}$ 是一列递增的可测集合:

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots .$$

令 $S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, 则 $mS = \lim\limits_{n\to\infty} mS_n$.

定理 9. 设 $\{S_i\}$ 是一列递降的可测集合:

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots .$$

令 $S = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} S_i = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, 则当 $mS_1 < \infty$ 时, $mS = \lim\limits_{n\to\infty} mS_n$.

注意, 定理 9 中的条件$mS_1 < \infty$ 是重要的.

为了给出反例，先用下节的定理: 任意区间 I 都可测, 并且 $mI = |I|$.

反例: 设 $S_n = (n, +\infty)(n = 1, 2, \cdots)$.

显然 $S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \cdots$, $S = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} S_i = \lim\limits_{n\to\infty} (n, \infty) = \varnothing$.

所以 $mS = 0$, 而

$$mS_n = m(n, \infty) = \infty.$$

故

$$mS_n = \infty \neq 0 = mS.$$

作业:

P52 习题 4, 5, 6, 7.