第一节　外测度

定义 1 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一点集, 对于每一列覆盖 E 的开区间 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$, 作出它的体积总和 $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$($\mu$ 可以等于 $+\infty$, 不同的区间列一般有不同的 μ), 所有这一切的 μ 组成一个下方有界的数集, 它的下确界 (由 E 完全确定) 称为E 的 Lebesgue 外测度, 简称 L 外测度或外测度, 记为 m^*E, 即

$$m^*E = \inf_{E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

定理 I 外测度具有以下三条基本性质:

(1) $m^*E \geq 0$, 当 E 为空集时, 则 $m^*E = 0$;

(2) 设 $A \subset B$, 则 $m^*A \leq m^*B$; (单调性)

(3) $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*A_i$. (次可数可加性)

例 1 设 E 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 则 $m^*E = 0$.

例 2 对于区间 I 有 $m^*I = |I|$.

作业:

P51-52 习题 1, 2, 3