

第五节 不可数集合

是不是无限集合全都是可数集合呢？答案是否定的。

定义： 不是可数集合的无限集合我们称为不可数集合。

定理 1. 全体实数所成之集合 \mathbf{R} 是一个不可数集合。

推论 1. 若用 c 表示全体实数所成集合 \mathbf{R} 的基数，用 a 表示全体正整数所成集合 \mathbb{N} 的基数。则 $c > a$ 。

以后称 c 为连续基数。(c 有时记为 \aleph)。此符号称为阿列夫，是希伯来字母)

定理 2. 任意区间 $(a, b), [a, b), (a, b], (0, \infty), [0, \infty)$ 均具有连续基数 c 。(这里 $a < b$)

定理 3. 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一列互不相交的集合, 它们的基数都是 c , 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的基数也是 c .

定理 4. 设若有一列集合 $\{A_n | n \in \mathbb{Z}^+\}$, $\overline{A_n} = c, n = 1, 2, \dots$, 而 $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $\overline{A} = c$. 换句话说就是, 实数列全体 E_{∞} 的基数是 c .

设 n 是一个正整数, 称由 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n 按确定的次序排成的数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的全体称为 n 维欧几里得空间, 记为 \mathbf{R}^n , 每个组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 称为欧几里得空间的点, 又 x_i 称为点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的第 i 个坐标.

定理 5. n 维欧几里得空间 \mathbf{R}^n 的基数为 c .

推论 2. 设有一列集合 $\{B_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, $B_n = \{0, 1\}$, 而 $B = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$, 则 $\overline{B} = c$.

证明 由于 $B \subset E_{\infty}$, 因此 $\overline{B} \leq c$.

任取 $x \in (0, 1)$, 用正规的二进位小数表示 x , 即 $x = 0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$, 其中 $a_n = 0, 1, n = 1, 2, \dots$.

定义

$$\varphi : (0, 1) \mapsto B, \quad \varphi(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

显然 φ 是单射, 于是 $\overline{B} \geq c$, 由伯恩斯坦定理, $\overline{B} = c$. ■

推论 3 设有 c 个 (c 表示连续基数) 集的并集, 若每个集的基数都是 c , 则其和集的基数也是 c .

证明: 对于每一个被加的集与平面 xoy 上平行于 ox 轴的直线上点的集做成一一对应, 也就得到所述的并与平面 xoy 上点的集做成了一对一的对应.

定理 6. 设 M 是任意的一个集合, 把它的所有子集作成新的集合记为 μ , 则 $\overline{\mu} > \overline{M}$.

定理 6 告诉我们没有一个最大的基数, 从而无限集合的不同基数也有无限之多.

设集合 A 的基数为 α , 我们记 A 的子集的全体所成的集族的基数为 2^α . 定理 6 告诉我们 $2^\alpha > \alpha$.

例. $2^a = c$.

证明 令 \mathbb{N} 为全体正整数所成的集合. 分别记 \mathbb{N} 的所有子集、所有有限子集、所有无限子集所成的集族为 A, A_0 和 A_∞ , 则 $A = A_0 \cup A_\infty$, $A_0 \cup A_\infty = \emptyset$.

对于任意的 $B \in A_\infty$, 令 $\varphi(B) = \sum_{k \in B} \frac{1}{2^k}$ (实际上这是二进位表示), 那么

φ 是一个从 A_∞ 到 $(0, 1]$ 上的一一对应. 故 $\overline{\overline{A_\infty}} = c$. 下证 $\overline{\overline{A_0}} = a$. 事实上, 令 $\psi: n \rightarrow \{n\}, n \in \mathbb{N}$, 则 \mathbb{N} 对等于 A_0 的一个子集, 因此 $\overline{\overline{A_0}} \geq a$, 另一方面, 对任意的 $C = \{n_1, n_2, \dots, n_k\} \in A_0$, 再令 $\lambda: C \rightarrow 0.n_1 n_2 \dots n_k$, 则 A_0 对等于 \mathbb{Q} 的一个子集, 故 $\overline{\overline{A_0}} \leq a$. 从而 $\overline{\overline{A_0}} = a$. 因此 $\overline{\overline{A}} = c$. 即 $2^a = c$. 证毕. ■

设 A 和 B 为两个集合, 如果存在一个从 A 到 B 中的一对一对应, 则 $\overline{A} \leq \overline{B}$; 如果存在一个从 A 到 B 上的对应, 则 $\overline{A} \geq \overline{B}$.

例. 设 A, B 为两个集合, 如果 $\overline{A \cup B} = c$, 则 $\overline{A} = c$ 或 $\overline{B} = c$.

证明 由于 $\overline{\mathbf{R}^2} = c$, 所以, 我们不妨设 $A \cup B = \mathbf{R}^2$. 显然

$$\overline{A} \leq c, \quad \overline{B} \leq c.$$

令 $A^* = \{x \in \mathbf{R} \mid \text{存在 } y \in \mathbf{R}, \text{ 使 } (x, y) \in A\}$, $B_* = \{y \in \mathbf{R} \mid \text{存在 } x \in \mathbf{R}, \text{ 使 } (x, y) \in B\}$. 显然 $A^* \subset \mathbf{R}$, $B_* \subset \mathbf{R}$, 这里 \mathbf{R} 为全体实数所成之集. 如果 $\overline{A} < c$, 且 $\overline{B} < c$, 则 $A^* \neq \mathbf{R}$ 且 $B_* \neq \mathbf{R}$. 取 $\xi \in \mathbf{R} \setminus A^*$, $\eta \in \mathbf{R} \setminus B_*$, 则 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 = A \cup B$. 另一方面, $(\xi, \eta) \notin A$ 且 $(\xi, \eta) \notin B$, 故 $(\xi, \eta) \notin A \cup B$. 矛盾. ■

由于可数集中元素比连续基数集中元素少得多, 我们通常尽可能地用可数集合交、并运算代替不可数集合的交、并运算.

例 1. 设 $f(x)$ 是定义在点集 E 上的函数, 则

$$\{x : f(x) = 0\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} \{x : |f(x)| < \varepsilon\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| < \frac{1}{n}\}.$$

同理

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} \{x : |f(x)| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}.$$

例 2. 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在点集 E 上的函数列, 则

$$\{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x \mid |f_n(x)| < \varepsilon\},$$

$$\{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 0 \text{ 或不存在的}\} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid |f_n(x)| \geq \varepsilon\}$$

分别可写成

$$\{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x \mid |f_n(x)| < \frac{1}{k}\},$$

$$\{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 0 \text{ 或不存在的}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x \mid |f_n(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$

作业:

习题 18(1)(3), 20.