第四节　可数集合

定义 1：与全体正整数所成集合 $\mathbb{Z}^+$ 对等的集合称为可数集 (或可列集).

集合 A 是可数集合的充要条件为: A 可以排成一个无穷序列:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

定理 1: 任何无限集合都至少包含一个可数子集.

这定理说明: 可数集在所有无限集中有最小的基数.

定理 2：可数集合的任何无限子集必为可数集合, 从而可数集合的任何子集或者是有限集或者是可数集. （或称为可数集合的任何子集是至多可列集）.

定理 3: 设 A 为可数集, B 为有限或可数集, 则 $A \bigcup B$ 为可数集.

推论: 设 $A_i, (i=1,2,\cdots,n)$ 是有限集或可数集, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 也是有限集或可数集, 但如果至少有一个是可数集, 则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 必为可数集.

定理 4: 设 $A_i (i=1,2,3,\cdots)$ 都是可数集, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可数集.

今后我们用 a 或 $\aleph_0$(读作阿列夫零) 表示可数集的基数.

定理 3 的推论和定理 4 分别可简写为

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{个}} = a,$$

$$a^2 = \underbrace{a + a + \cdots + a + \cdots}_{\text{可数个}} = a.$$

定理 5: 有理数全体成一可数集

推论: (0, 1) 与 [0, 1] 对等.

$$(0,1)\sim[0,1]\sim(a,b)\sim[a,b]\sim[0,\infty)\sim(-\infty,0]\sim(-\infty,\infty).$$

一般地, 就是对任意的区间 (a,b)(无论是开是闭) 均对等. (这里 $a<b$)

例 1. 设集合 A 中元素都是直线上的开区间, 满足条件 若开区间 $K,J\in A$ 若 $K\neq J$, 则 $K\bigcap J=\emptyset$. 证明 A 是可数集或有限集.

定理 6: 设 A_i 是可数集, $i = 1, 2, \ldots, n$, 则 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 是可数集.

例 2: 平面上坐标为有理数的点的全体所成的集合为一可数集.

例 3: 元素 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ 是由 k 个正整数组成的, 其全体成一可数集.

例 4: 整系数多项式 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 的全体是一可数集.

定理 7: 代数数的全体成一可数集. (所谓代数数, 是整系数多项式的根)

例 5.设 A 是一个无限集合, 则必有 $A^* \subset A$, 使 $A^* \sim A$, 且 $A \setminus A^*$ 可数.

证明: 由于 A 是一个无穷集合, 所以含有一个可数子集 B. 设 $B = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. 令 $B_1 = \{a_1, a_3, a_5, \cdots\}$, $B_2 = \{a_2, a_4, a_6, \cdots\}$, 则 $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ 且 B_1, B_2 均为可数集. 令

$$P = A \setminus B, A^* = B_2 \cup P,$$

则 $A = B \bigcup P$ 且 $A \setminus A^* = B_1$ 是可数集. 又因 B_2 也是可数集, 所以 $B \sim B_2$. 由于 $P \cap B_2 = \varnothing, P \cap B = \varnothing$, 所以 $A^* = B_2 \cup P \sim A = B \cup P$.

利用无限集具有可数子集及可数集性质证明集合对等是一种常用的技巧.

作业：

P21 习题 16, 17.