第三节　对等与基数

定义 1. 设 A, B 为两个非空集合, 如果有某一法则 φ, 使每个 $x \in A$ 有唯一确定的 $y \in B$ 和它对应, 则称 φ 为A 到 B 内的映射, 记为 $\varphi : A \to B$.

当映射 φ 使 y 和 x 对应时, y 称为x 在映射 φ 下的像, 记作 $y = \varphi(x)$. 也可表示为 $\varphi : x \mapsto y$.

对于任一固定的 y, 称适合关系 $y = \varphi(\mathrm{x})$ 的 x 的全体是元素y 在 φ 之下的原像.

集合 A 称为映射 φ 的定义域, 记为 $D(\varphi)$. 设 C 是 A 的子集, C 中所有元素的像的全体, 记为 $\varphi(C)$, 称它是集 C 在 φ 之下的像. $\varphi(A)$ 称为映射 φ 的值域, 也记为 $R(\varphi)$.

定义 2. 设 $\varphi : A \to B$, 称 φ 为

(1) 单射: 若由任意 $x \in A$, $\varphi(x) = \varphi(y)$, 可推得 $x = y$;

(2) 满射: 若对任意 $y \in B$, 存在 $x \in A$, 使得 $\varphi(x) = y$;

(3) 双射: 若 φ 既是单射又是满射.

定义 3. 设 φ 是从 A 到 B 的一个双射, 则对任意 $y \in B$, 存在唯一 $x \in A$, 使 $y = \varphi(x)$, 称 $\sigma(y) = x$ 所定义的映射 $\sigma : B \to A$ 为 φ 的**逆映射**, 记为 $\sigma = \varphi^{-1} : B \to A$.

逆映射是反函数概念的推广. 一个严格单调函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)$ 可以看成映射 $f(x)$ 的逆映射.

定义 4. 设 A, B 为两个非空集合, 若存在从集合 A 到 B 上双映 φ, 则称 A 和 B 对等. 记为 $A \sim B$. 规定 $\varnothing \sim \varnothing$.

例 1: 我们可给有限集合一个不依赖于元素个数概念的定义: 集合 A 称为有限集合, 如果 $A = \varnothing$ 或者 A 和正整数的某截段 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 对等.

例 2: $\{$正奇数全体$\} \sim \{$正偶数全体$\}$. 事实上, 只要令 $\varphi(x) = x + 1$ 即可.

例 3：{正整数全体} $\sim${正偶数全体}. 这只要令 $\varphi(x) = 2x$, x 是正整数.

例 4: (I) 区间 (0, 1) 和全体实数 $\mathbb{R}$ 对等, 只需对每个 $x \in (0,1)$, 令 $\varphi(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(II) 区间 (0, 1) 和区间 (a,b) 对等, 只需对每个 $x \in (0,1)$, 令 $\varphi(x) = (b-a)\cdot x + a$.

例 3 和例 4 说明, 一个无限集可以和它的一个真子集对等 (可以证明, 这一性质正是无限集的特征, 常用来作为无限集的定义). 这一性质对有限集来说是不能成立的. 由此可以看到无限集与有限集之间的深刻差异.

例 5. 设 A 和 B 是两个同心圆周上的点集, 则 $A \sim B$.

定理 1. 对任何集合 A, B, C 均有

(1) (反射性) $A \sim A$;

(2) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(3) (传递性) 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

我们把两个彼此对等的集合称为具有相同的基数 (亦称势、浓度), 用 $\overline{\overline{A}}$ 表示集合 A 的基数.

注: 基数的概念可以看作有限集合中所含元素个数的推广.

命题 1. 设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 为两集列. 且集列 $\{A_n\}$ 中任何两个集不相交, 集列 $\{B_n\}$ 中的集亦两两不相交, 即 $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $B_i \bigcap B_j = \varnothing$ (当 $i \neq j$), 如果 $A_n \sim B_n \, (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

定义 5: 设 A 和 B 是两个集合, 如果 A 不与 B 对等, 但存在 B 的真子集 B^*, 有 $A \sim B^*$, 则称 A 比 B 有较小的基数 (或 B 比 A 有较大的基数) 并记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ (或 $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$).

我们要提出问题: 任给两个集合 A, B, 在 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, $\quad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, $\quad \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 中是否必有一个成立且只有一个成立呢?

定理 2 (伯恩斯坦 (Bernstein) 定理): 设 A, B 是两个非空集合. 如果 A 对等于 B 的一个子集, B 又对等于 A 的一个子集, 那么 A 对等于 B.

注:利用基数的说法是: 设 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

作业：

P21 习题 13, 14.