第二节　集合的运算

2.1 集合的并集

设 A 和 B 是两个集合. 由 A 和 B 的所有元素所构成的集合称为 A 与 B 的并集合或者和集, 简称为并或者和, 记为 $A \bigcup B$. 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{或者} x \in B\}.$$

设有一族集合 $\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, 其中 α 是在固定指标集 Λ 中变化的指标; 则由一切 $A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ 的所有元素所组成的集称为这族集合的和集或并集, 记为 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, 它可表示为

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x | \text{存在某个} \alpha \in \Lambda \text{使} x \in A_\alpha\}.$$

习惯上，当 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为有限集时， $A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 写成 $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, 而 $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 写成 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 我们称之为可数并.

例 1: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 E 上的函数, 则对任意 $c \in \mathbb{R}$,

$$\{x : \max\{f(x), g(x)\} > c\} = \{x : f(x) > c\} \bigcup \{x : g(x) > c\}.$$

例 2: $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$.

例 3: 若记 $Q_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}, n = 1, 2, \cdots$, 则 $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$.

例 4: 若 $\{I_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是一族开区间, 而 $[a,b] \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, 则存在 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\} \in \Lambda$, 使得 $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_{\alpha_i}$ (有限覆盖定理).

例 5: 若 $f(x)$ 是定义在 E 上的函数, 则

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

2.2 集合的交集

设 A、B 是任意两个集合. 由一切既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合 C, 称为 A 和 B 的积集或交集, 简称为积或交, 记为 $C = A \cap B$. 它可以表示为

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

设 $\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是任意集族, 其中 α 是指标, Λ 是指标集; 则由一切同时属于每个 $A_\alpha(\alpha \in \Lambda)$ 的元素所组成的集, 称为这集族的积或交, 记为 $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, 它可以表示为

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x | \text{对任意 } \alpha \in \Lambda \text{ 有 } x \in A_\alpha\}.$$

习惯上，当 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为有限集时，$A = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 写成 $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$，而 $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$ 写成 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，我们称之为可数交.

例 6: 若 $f(x)$ 是定义在 E 上的函数，则

$$\{x : a < f(x) \le b\} = \{x : f(x) > a\} \bigcap \{x : f(x) \le b\}.$$

例 7: 若 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，则存在唯一 $x_0 \in \mathbf{R}$，使得 $x_0 \in [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$，即 $\{x_0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$(区间套定理).

注意：区间套定理中所给出的区间必须是闭区间.

例 8: 若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一列函数, 则对任意 $c \in \mathbf{R}$,

(1) $\{x : \sup\limits_n f_n(x) \le c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \le c\}$;

(2) $\{x : \sup\limits_n f_n(x) > c\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > c\}$.

证明 (1) 若 $x_0 \in \{x : \sup\limits_n f_n(x) \le c\}$, 则对任意 n, $f_n(x_0) \le \sup\limits_n f_n(x_0) \le c$, 即 $x_0 \in \{x : f_n(x) \le c\}$. 由 n 的任意性, $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \le c\}$. 反之, 若 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \le c\}$, 则对任意 n, 有 $f_n(x_0) \le c$, 因此 $\sup\limits_n f_n(x_0) \le c$, 即 $x_0 \in \{x : \sup\limits_n f_n(x) \le c\}$.

(2) 的证明类似，自己练习.

定理 1. 关于集合的交和并有以下性质:

(1) (交换律) $A\bigcup B=B\bigcup A$, $A\bigcap B=B\bigcap A$;

(2) (结合律) $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$,

$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$;

(3) (分配律) $A\bigcap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\bigcap B_\alpha)$,

$A\bigcup(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\bigcup B_\alpha)$;

(4) (吸收律) $A\bigcap A=A$, $A\bigcup A=A$.

另外, 不难看出

(1)$A\bigcap B\subset A\subset A\bigcup B$;

(2) 若 $A_\alpha\subset B_\alpha,\alpha\in\Lambda$,

则

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha,\ \bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha.$$

2.3 集合的差集和补集

设 A, B 是任意两个集合, 如果 C 是由一切属于 A 而不属于 B 的元素所组成, 则我们称集合 C 为 A 减 B 所得的差集, 记为 $C = A - B$ 或 $C = A \backslash B$. 它可以表示为

$$A - B = \{x | x \in A \text{但} x \notin B\}.$$

注意 (1) 这里并不要求 $A \subset B$; (2) 一般说来, $(A \backslash B) \bigcup B \neq A$.

设 $A \subset S$, 则 $S \backslash A$ 表示 A 关于 S 的余集, 记为 $C_S A$.

如果没有必要标出 S, 也可简单地记为 CA. 当我们讨论的集合都是某一个大集合 S (称为全集) 的子集时, 我们称 $S \backslash A$ 为 A 的补集, 并记 $S \backslash A = A^c$. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 把 $\mathbb{R}^n \backslash A$ 写成 A^c.

例 9: $Q^c = \left\{x \middle| x\text{是无理数}\right\}$.

例 10: 若 $f(x)$ 定义在集合 E 上, $S = E$, 则

$$\{x|f(x) > a\}^c = \{x|f(x) \leqslant a\} .$$

设 S 是全集. 则

(1)$S^c = \varnothing, \varnothing^c = S$;

(2)$A \bigcup A^c = S, A \bigcap A^c = \varnothing$;

(3)$((A^c))^c = A$;

(4)$A \setminus B = A \bigcap B^c$(因此研究差集运算可通过研究余集运算来实现);

(5) 若 $A \subset B$, 则 $A^c \supset B^c$;

定理 2(德摩根 (De Morgan) 公式, 对偶律) 若 $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是一族集合, 则

(1) $(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$;

(2) $(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$.

证明 (1) 设 $x \in (\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$, 则 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 于是, 对每个 $\alpha \in \Lambda$, 均有 $x \notin A_\alpha$, 故 $x \in (A_\alpha)^c$, 从而 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha)^c$, 这证明了 $(\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c \subset \cap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)^c$.

反之, 设 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha)^c$, 对每个 $\alpha \in \Lambda$, 均有 $x \in (A_\alpha)^c$, 即 $x \notin A_\alpha$. 当然, $x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 这意味着 $x \in (\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$, 因而 $\cap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)^c \subset (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$. 由所得两方面的结果, 便知等式成立

■

(2) 设 $x \in (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$, 则 $x \notin \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 于是, 可知必存在某一 $\alpha_0 \in \Lambda$, 使 $x \notin A_{\alpha_0}$, 故 $x \in (A_{\alpha_0})^c$, 从而 $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)^c$, 这证明了

$$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)^c.$$

反之, 设 $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)^c$, 则存在某一个 $\alpha_0 \in \Lambda$, 使 $x \in (A_{\alpha_0})^c$, 即 $x \notin A_{\alpha_0}$. 当然, $x \notin \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 这意味着 $x \in (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$, 因而

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)^c \subset (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c.$$

由所得两方面的结果, 便知等式成立, 证毕.

例 11: 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上函数列. 若 $x \in E$, 则 $\{f_n(x)\}$ 有界的充要条件是存在 $M > 0$, 使得对 $\forall n$, $|f_n(x)| \leqslant M$.

注意到与 “存在” 相对应的是并集运算, 与 “任意” 相对应的是交集运算, 从而

$$\left\{x \middle| \{f_n(x)\} \text{ 有界}\right\} = \bigcup_{M \in \mathbb{R}^+} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid |f_n(x)| \leqslant M\}.$$

用 De Morgan 公式, 有

$$\left\{x \middle| \{f_n(x)\} \text{ 无界}\right\} = \left\{x \middle| \{f_n(x)\} \text{ 有界}\right\}^c = \bigcap_{M \in \mathbb{R}^+} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \middle| |f_n(x)| > M\right\}.$$

例 12: 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的函数列, 若 x 是使 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 0 的点, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n \geqslant N$, $|f_n(x)| < \varepsilon$, 即

$$\left\{x \middle| \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\right\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x \mid |f_n(x)| < \varepsilon\}. \tag{1}$$

用 De Morgan 公式

$$\left\{x \middle| \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0\text{或不存在}\right\} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{x \middle| |f_n(x)| \geqslant \varepsilon\right\}. \tag{2}$$

注意: $\{f_n(x)\}$ 表示 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{f_n(x)\}, n = 1, 2, \cdots$.

2.4 集合列的上极限和下极限

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集. 由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一集列的上限集或上极限，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$. 它可表示为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \left\{x \middle| \text{存在无穷多个} A_n, \text{使} x \in A_n\right\}.$$

根据这个定义不难得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \left\{x \middle| \text{对任意} N > 0, \text{存在一个} n \geqslant N \text{使得} x \in A_n\right\}.$$

例如: 集列 $A_n = \{(-1)^n\}$ 的上极限为 $\{-1, 1\}$.

对集列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 那种除有限个下标外，属于集列中每个集的元素全体所组成的集称为这一集列的下限集或下极限，记 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \{x|当n充分大以后都有x \in A_n\},$$

或者

$$\varliminf_{n\to\infty} = \{存在N, 当n \geqslant N 时, x \in A_n\}.$$

例如：集列 $A_n = \{(-1)^n\}$ 的下极限是 $\varnothing$.

例 13: 设 A_n 是如下一列点集:

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right], \quad m = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right], \quad m = 1, 2, 3, \cdots,.$$

求 A_n 的上极限和下极限.

例 14: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时有 $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, 即除有限个 n 外, $a \in (a_n-\varepsilon, a_n+\varepsilon)$, 因此

$$a \in \varliminf_{n\to\infty} \{x \mid |x-a_n| < \varepsilon\}.$$

由 ε 的任意性

$$a \in \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} \varliminf_{n\to\infty} \{x \mid |x-a_n| < \varepsilon\}.$$

再由极限的唯一性,

$$\{a\} = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} \varliminf_{n\to\infty} \{x \mid |x-a_n| < \varepsilon\}.$$

上下极限还可以用交集与并集来表示.

定理 3 (1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$, (2) $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$.

显然我们有 $\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$, $N \in \mathbf{N}$.

利用该定理, 例 12 中的 (1) 式和 (2) 式分别简写为

$$\{x \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\} = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} \underline{\lim_{n\to\infty}} \{x \mid |f_n(x)| < \varepsilon\},$$

$$\{x \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0 \text{或不存在}\} = \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} \overline{\lim_{n\to\infty}} \{x \mid |f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}).$$

上下极限的运算有:

(1) $(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n)^c = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n^c$;

(2) $S\backslash \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} S\backslash A_n$

如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = A$, 则称集列 $\{A_n\}$ 收敛, 并称 A 为 $\{A_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

如集列 $[0, 1+\frac{1}{n}]$ 收敛于极限集 $[0, 1]$.

2.5 单调集列

如果集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 则称 $\{A_n\}$ 为递增集列. 如果集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n \supset A_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 则称 $\{A_n\}$ 为递减集列. 递增与递减的集列统称为单调集列.

容易证明以下性质

性质: 单调集列是收敛的, 并且如果 $\{A_n\}$ 增加, 则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

如果 $\{A_n\}$ 减少, 则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

例 15： 设 $f(x)$ 是定义在 E 上的有限函数，若 $F_n = \{x \big| |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}, n = 1, 2, \cdots$，则 $\{F_n\}$ 是增加集列，且

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \big| |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\} = \{x \big| f(x) \neq 0\};$$

若 $E_n = \{x \big| f(x) > n\}, n = 1, 2, \cdots$，则 $\{E_n\}$ 是减少集列，且

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \big| f(x) > n\} = \varnothing.$$

6. 集合的直积

若 $A_i, (i=1,\cdots,n)$ 是集合, 则

$$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in A_i,\ i=1,\cdots,n\}$$

称为 $A_i, (i=1,\cdots,n)$ 的直积, 记为

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times\cdots\times A_n.$$

类似地,

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\times A_2\times\cdots=\{(x_1,x_2,\cdots): x_i\in A_i, i=1,2,\cdots\}$$

作业：

P20-21 习题 1(1), 2(2), 3, 4, 7(2), 10(1),11, 12.