

概 率 论

Probability

已学知识点

● 第一章 事件与概率

▶ 随机现象与统计规律性

- ① 概率的频率解释依然是当今最通行的解释.
- ② 描述频率趋近于概率的大数定律总是概率论的第一大数定律.
- ③ 实际当中用频率作为概率的估计是十分自然的.

▶ 样本空间与事件

| 符号 | 集合论含义 | 概率论含义 |
|----------------|--------------------|-----------------------|
| Ω | 空间或全集 | 样本空间或必然事件 |
| Φ | 空集 | 不可能事件 |
| ω | 元素 | 样本点 |
| A | 子集 | 随机事件 |
| $\omega \in A$ | ω 是 A 的元素 | 事件 A 包含样本点 ω |
| $A \subset B$ | A 是 B 的子集 | A 发生则 B 发生 |
| $AB = \Phi$ | A, B 不相交 | A, B 不可能同时发生 |
| $A \cup B$ | 并集 | A, B 至少有一个发生 |
| $A \cap B$ | 交集 | A, B 同时发生 |
| $A - B$ | 差集 | A 发生而 B 不发生 |
| \bar{A} | 余集 | A 不发生 |

已学知识点

● 第一章 事件与概率

- ▶ 古典概型 (等可能概率模型): (1) 样本空间样本点有限; (2) 每个样本点等可能出现.
 - 计数方法: 排列组合.
 - 三个基本性质: 非负性、规范性、有限可加性.
- ▶ 几何概率: 以等可能性定义概率, 处理无限场合, 概率是几何体的测度之比.
 - 三个基本性质: 非负性、规范性、可列可加性.
- ▶ 概率空间: (Ω, \mathcal{F}, P)
 - 难点和要点: 事件域 \mathcal{F} 的选择, 太小不能满足需要, 太大难以定义概率.
 - 选择包含我们关注的所有事件的 σ 域, 保证事件对交、并、逆、差作可列次运算的封闭性.
 - 在这种 σ 域上, 能定义满足非负、规范和可列可加性的概率测度.

已学知识点

- 第二章 条件概率与统计独立性

- ▶ 条件概率: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

- 乘法公式: $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

- 全概率公式: $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

- Bayes 公式: $P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$

$$\left. \begin{array}{l} A_i \cap A_j = \Phi \quad (i \neq j) \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \end{array} \right\}$$

已学知识点

● 第二章 条件概率与统计独立性

- ▶ 事件独立性：两个事件 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. 三个事件
- $$\begin{cases} P(AB) = P(A) \cdot P(B) \\ P(AC) = P(A) \cdot P(C) \\ P(BC) = P(B) \cdot P(C) \\ P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{cases}$$

- ▶ 试验独立性：一个试验的结果对其它各试验的可能结果的概率都无影响.

- ▶ Bernoulli 试验 E : 概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) , 其中

$$A \subset \Omega, \quad \mathcal{F} = \{\Phi, A, \bar{A}, \Omega\}, \quad P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = q, \quad (p > 0, q > 0, p + q = 1)$$

○ Bernoulli 分布

○ 二项分布

○ 几何分布

○ Pascal 分布

○ 多项分布

○ Poisson 分布

已学知识点

● 第三章 随机变量与分布函数

▶ **随机变量与分布函数**: 定义于概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的单值实函数 $\xi(\omega)$, 若对直线上任一 Borel 点集 B , 有 $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, 则称 $\xi(\omega)$ 为**随机变量**, 称 $F(x) = P\{\xi(\omega) \leq x\}$, $-\infty < x < \infty$ 为 $\xi(\omega)$ 的**(累积) 分布函数**. 记作 $\xi(\omega) \sim F(x)$.

○ 分布函数的性质:

① **单调性**: 若 $a < b$, 则 $F(a) \leq F(b)$.

② **有界性**: $0 \leq F(x) \leq 1$, 且 $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

③ **右连续性**: $F(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+0} F(t) = F(x)$.

④ **分布函数可以唯一确定概率分布**.

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

- ▶ **随机变量与分布函数**: 定义于概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的单值实函数 $\xi(\omega)$, 若对直线上任一 Borel 点集 B , 有 $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, 则称 $\xi(\omega)$ 为**随机变量**, 称 $F(x) = P\{\xi(\omega) \leq x\}$, $-\infty < x < \infty$ 为 $\xi(\omega)$ 的**(累积) 分布函数**. 记作 $\xi(\omega) \sim F(x)$.

- 利用分布函数计算概率:

- ① $P\{\xi(\omega) \leq a\} = F(a)$

- ② $P\{\xi(\omega) = a\} = F(a) - F(a - 0)$

- ③ $P\{\xi(\omega) \geq a\} = 1 - F(a - 0)$

- ④ $P\{\xi(\omega) > a\} = 1 - F(a)$

- ⑤ $P\{a < \xi(\omega) \leq b\} = F(b) - F(a)$

已学知识点

● 第三章 随机变量与分布函数

▶ **离散型随机变量**: 随机变量 ξ 的全部可能取值为有限个或可列无限多个 $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$

○ 分布律 (列): $P\{\xi = x_k\} \triangleq p_k, k = 1, 2, \dots$

| | | | | | |
|-------|-------|-------|---------|-------|---------|
| ξ | x_1 | x_2 | \dots | x_k | \dots |
| p_k | p_1 | p_2 | \dots | p_k | \dots |

○ 已知分布列求分布函数: $F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k, -\infty < x < +\infty$

$p_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

○ 已知分布函数求分布列: $P\{\xi = x\} = F(x) - F(x-0), \forall x \in \mathbb{R}$

○ 常见的离散型分布:

① 退化分布

② Bernoulli 分布

③ 二项分布

④ 超几何分布

⑤ Poisson 分布

⑥ 几何分布

⑦ Pascal 分布

⑧ 负二项分布

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

- ▶ **连续型随机变量**: 存在非负可积函数 $p(x)$ (概率密度函数), 使得 $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ $p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

- 分布函数 $F(x)$ 绝对连续、几乎处处可导: $p(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, for a.e. $x \in \mathbb{R}$

- 概率计算: 对 \mathbb{R} 中任一 Borel 点集 B 有 $P\{\xi \in B\} = \int_B p(x) dx$.

- 常见的连续型分布:

- ① 均匀分布

- ② 正态分布

- ③ 指数分布

- ④ Erlang 分布

- ⑤ Γ 分布

已学知识点

● 第三章 随机变量与分布函数

▶ **随机向量**: $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ 是定义在同一概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, 称

$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ 为 **n 维随机向量**, 称

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1(\omega) \leq x_1, \xi_2(\omega) \leq x_2, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\}$ 为 **(联合) 分布函数**.

○ (联合) 分布函数的性质:

① **单调性**: $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 关于每个一元变量 x_i 都是单调不降函数.

② **规范性**: $F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$, $F(-\infty, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$,

$$F(x_1, -\infty, x_3, \dots, x_n) = 0, \dots, F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -\infty) = 0$$

③ **右连续性**: $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 关于每个一元变量 x_i 都是左连续的函数.

④ **$n = 2$ 时**: $\forall a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$ 有 $F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$.

已学知识点

● 第三章 随机变量与分布函数

▶ **随机向量**: $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ 是定义在同一概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, 称

$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ 为 **n 维随机向量**, 称

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1(\omega) \leq x_1, \xi_2(\omega) \leq x_2, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\}$ 为 **(联合) 分布函数**.

○ 常见的多元离散型分布:

① 联合分布律: $p\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = P\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n\}$

② 概率计算: $P\{\xi \in D\} = \sum_{x \in D} p(x_1, x_2, \dots, x_n)$

③ 多项分布: $P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$

④ 多元超几何分布: $P(\xi_1 = n_1, \xi_2 = n_2, \dots, \xi_r = n_r) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \dots \binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}$

| $\xi \backslash \eta$ | y_1 | y_2 | \dots | y_j | \dots |
|-----------------------|---------------|---------------|----------|---------------|----------|
| x_1 | $p(x_1, y_1)$ | $p(x_1, y_2)$ | \dots | $p(x_1, y_j)$ | \dots |
| x_2 | $p(x_2, y_1)$ | $p(x_2, y_2)$ | \dots | $p(x_2, y_j)$ | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots |
| x_i | $p(x_i, y_1)$ | $p(x_i, y_2)$ | \dots | $p(x_i, y_j)$ | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots |

已学知识点

● 第三章 随机变量与分布函数

▶ **随机向量**: $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ 是定义在同一概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, 称

$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ 为 **n 维随机向量**, 称

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1(\omega) \leq x_1, \xi_2(\omega) \leq x_2, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\}$ 为 **(联合) 分布函数**.

○ 常见的多元连续型分布:

① 联合 p.d.f.: 非负可积函数 $p(x_1, \dots, x_n)$ 使 $F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n$

② 概率计算: $P\{\xi \in D\} = \int_D \cdots \int p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$

③ 多元均匀分布: $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \\ 0, & (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin G \end{cases}$

④ 多元正态分布: $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T\right\}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma > 0$

已学知识点

● 第三章 随机变量与分布函数

▶ 边际分布：仅讨论二维情形

$$p(x_i, y_j) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

○ **离散型**：联合分布律 $p(x_i, y_j) \triangleq P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$, $i, j = 1, 2, \dots$

○ ξ, η 的**边际 (边缘) 分布**：

○ 若 (ξ, η) 的联合分布函数为 $F(x, y)$ ，则

$$F_{\xi}(x) = F(x, +\infty), \quad F_{\eta}(y) = F(+\infty, y)$$

| $\xi \backslash \eta$ | y_1 | y_2 | \dots | y_j | \dots | $p_1(\cdot)$ |
|-----------------------|---------------|---------------|----------|---------------|----------|--------------|
| x_1 | $p(x_1, y_1)$ | $p(x_1, y_2)$ | \dots | $p(x_1, y_j)$ | \dots | $p_1(x_1)$ |
| x_2 | $p(x_2, y_1)$ | $p(x_2, y_2)$ | \dots | $p(x_2, y_j)$ | \dots | $p_1(x_2)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots |
| x_i | $p(x_i, y_1)$ | $p(x_i, y_2)$ | \dots | $p(x_i, y_j)$ | \dots | $p_1(x_i)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots |
| $p_2(\cdot)$ | $p_2(y_1)$ | $p_2(y_2)$ | \dots | $p_2(y_j)$ | \dots | 1 |

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

- ▶ 边际分布：仅讨论二维情形

- 连续型： $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv$, $p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$, a.e.

- 概率计算： $P \left\{ (\xi, \eta) \in D \right\} = \iint_D p(x, y) dx dy$

- 边际概率密度函数： $p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy$, $p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx$

已学知识点

| | | | | | | |
|-----------------------|---------------|---------------|----------|---------------|----------|--------------|
| $\xi \backslash \eta$ | y_1 | y_2 | \dots | y_j | \dots | $p_1(\cdot)$ |
| x_1 | $p(x_1, y_1)$ | $p(x_1, y_2)$ | \dots | $p(x_1, y_j)$ | \dots | $p_1(x_1)$ |
| x_2 | $p(x_2, y_1)$ | $p(x_2, y_2)$ | \dots | $p(x_2, y_j)$ | \dots | $p_1(x_2)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots |
| x_i | $p(x_i, y_1)$ | $p(x_i, y_2)$ | \dots | $p(x_i, y_j)$ | \dots | $p_1(x_i)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots |
| $p_2(\cdot)$ | $p_2(y_1)$ | $p_2(y_2)$ | \dots | $p_2(y_j)$ | \dots | 1 |

● 第三章 随机变量与分布函数

▶ 条件分布：仅讨论二维情形

○ **离散型**： η 关于 ξ 的条件分布 $P\left\{\eta = y_j \mid \xi = x_i\right\} = \frac{p(x_i, y_j)}{p_1(x_i)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$

ξ 关于 η 的条件分布 $P\left\{\xi = x_i \mid \eta = y_j\right\} = \frac{p(x_i, y_j)}{p_2(y_j)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$

○ **连续型**： η 关于 ξ 的条件分布 $p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_\xi(x)}, \quad p_\xi(x) \neq 0$

ξ 关于 η 的条件分布 $p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_\eta(y)}, \quad p_\eta(y) \neq 0$

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

- 随机变量的独立性:** $P \{ \xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n \} = P \{ \xi_1 \leq x_1 \} \cdot P \{ \xi_2 \leq x_2 \} \cdot \dots \cdot P \{ \xi_n \leq x_n \}$

$$\iff F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1) \cdot F(x_2) \cdot \dots \cdot F(x_n)$$

- 离散型随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$P \{ \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n \} = P \{ \xi_1 = x_1 \} \cdot P \{ \xi_2 = x_2 \} \cdot \dots \cdot P \{ \xi_n = x_n \}$$

- 连续型随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot \dots \cdot p(x_n)$$

| | | | | | | |
|--------------------------|---------------|---------------|----------|---------------|----------|--------------|
| $\xi_1 \backslash \xi_2$ | y_1 | y_2 | \dots | y_j | \dots | $p_1(\cdot)$ |
| x_1 | $p(x_1, y_1)$ | $p(x_1, y_2)$ | \dots | $p(x_1, y_j)$ | \dots | $p_1(x_1)$ |
| x_2 | $p(x_2, y_1)$ | $p(x_2, y_2)$ | \dots | $p(x_2, y_j)$ | \dots | $p_1(x_2)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots |
| x_i | $p(x_i, y_1)$ | $p(x_i, y_2)$ | \dots | $p(x_i, y_j)$ | \dots | $p_1(x_i)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots |
| $p_2(\cdot)$ | $p_2(y_1)$ | $p_2(y_2)$ | \dots | $p_2(y_j)$ | \dots | 1 |

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

- ▶ 随机变量的独立性:

- 二元正态分布: $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) \implies X, Y$ 相互独立的充分必要条件是 $\rho = 0$

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}$$

→ 边际分布

$$\begin{cases} \xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ \eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{cases}$$

→ 条件分布

$$\begin{cases} (\eta | \xi = x) \sim N\left(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1), \sigma_2^2 (1 - \rho^2)\right) \\ (\xi | \eta = y) \sim N\left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \rho^2)\right) \end{cases} \xrightarrow{\rho=0} \begin{cases} (\eta | \xi = x) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \\ (\xi | \eta = y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \end{cases}$$

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

- ▶ 随机变量的独立性:

定理: 如果随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 相互独立, 则其中任何一部分随机变量仍独立.

定理: 若随机变量 ξ, η 相互独立, 则条件分布化为无条件分布 $P\{\eta \leq y \mid \xi = x\} = P\{\eta \leq y\}$.

- ▶ 随机向量的独立性: 对于 n 维随机向量 ξ 和 m 维随机向量 η , 如果 $\forall A \in \mathcal{B}_n, B \in \mathcal{B}_m$ 都有

$$P\{\xi \in A, \eta \in B\} = P\{\xi \in A\} \cdot P\{\eta \in B\}$$

则称 ξ 与 η 相互独立.

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

- ▶ Borel 函数与随机变量的函数:

- 离散型随机变量的函数的分布: 设 ξ 的分布列为

| | | | | | |
|------------------------|-------|-------|---------|-------|---------|
| ξ | x_1 | x_2 | \dots | x_n | \dots |
| $p_i = P\{\xi = x_i\}$ | p_1 | p_2 | \dots | p_n | \dots |

则 $g(\xi)$ 的分布列为

| | | | | | |
|------------------------|----------|----------|---------|----------|---------|
| $g(\xi)$ | $g(x_1)$ | $g(x_2)$ | \dots | $g(x_n)$ | \dots |
| $P\{g(\xi) = g(x_i)\}$ | p_1 | p_2 | \dots | p_n | \dots |

如果某些 $g(x_i)$ 相等, 将它们作适当并项且将对应的概率 p_i 相加即可.

已学知识点

● 第三章 随机变量与分布函数

▶ Borel 函数与随机变量的函数:

○ 离散型随机变量的函数的分布: 设 (ξ, η) 的联合分布列为

| | | | |
|-----------------------|------|------|-----|
| $\xi \backslash \eta$ | -1 | 0 | 2 |
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0 |
| 1 | 0.3 | 0.05 | 0.1 |
| 2 | 0.15 | 0 | 0.1 |

二元情形的表上作业法: 一般分三步进行, 如 $\zeta = \xi + \eta$

① 将 (ξ, η) 的联合分布列表达如右上表.

② 求每一对 (x_i, y_j) 对应的函数值 $g(x_i, y_j)$

并标在对应小方框的右下角.

③ 将第二个表格中 $g(x_i, y_j)$ 值相同的项合并

即得 $\zeta = g(\xi, \eta)$ 的分布.

| | | | |
|-----------------------|-----------|-----------|----------|
| $\xi \backslash \eta$ | -1 | 0 | 2 |
| 0 | 0.1 -1 | 0.2 0 | 0 2 |
| 1 | 0.3 0 | 0.05 1 | 0.1 3 |
| 2 | 0.15 1 | 0 2 | 0.1 4 |

| | | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|---|-----|-----|
| $\zeta = \xi + \eta$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| P_i | 0.1 | 0.5 | 0.2 | 0 | 0.1 | 0.1 |

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

- ▶ Borel 函数与随机变量的函数:

- 离散卷积 (convolution) 公式: 设 ξ, η 相互独立, 取值均为非负整数, 则 $\zeta = \xi + \eta$ 的分布为

$$P\{\zeta = r\} = \sum_{k=0}^r P\{\xi = k\} \cdot P\{\eta = r - k\}$$

定理: 若 $\xi \sim B(m, p)$, $\eta \sim B(n, p)$ 相互独立, 则 $\xi + \eta \sim B(m + n, p)$.

定理: 若 $\xi \sim P(\lambda_1)$, $\eta \sim P(\lambda_2)$ 相互独立, 则 $\xi + \eta \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

3.3 随机变量的函数及其分布 (续)

一、Borel 函数与随机变量的函数

二、单个随机变量的函数的分布

三、随机向量的函数的分布

四、随机向量的变换

五、随机变量的函数的独立性

二、单个随机变量的函数的分布

- **问题**: 已知 ξ 的分布函数 $F(x)$ 或密度函数 $p(x)$, 求 $\eta = g(\xi)$ 的分布函数 $G(y)$ 或密度函数 $q(y)$.

分布函数的定义 $\rightarrow G(y) = P\{\eta \leq y\} = P\{g(\xi) \leq y\} = \int_{g(\xi) \leq y} p(x) dx$

- ▶ 积分计算的难易程度既与被积函数 $p(x)$ 有关, 更与积分区域 $\{x : g(\xi) \leq y\}$ 的形状相关.
- ▶ 具体问题具体分析, 大致可分为两类: 直接法、变换法.

二、单个随机变量的函数的分布

- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) \leq y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算。

- ▶ **例**：设 ξ 的密度函数为 $p(x)$ ， $\eta = a\xi + b$ ($a \neq 0$)，求 η 的密度函数 $q(y)$ 。

η 的分布函数 \rightarrow

$$G(y) = P\{\eta < y\} = P\{a\xi + b < y\} = \begin{cases} P\left\{\xi < \frac{y-b}{a}\right\}, & a > 0 \\ P\left\{\xi > \frac{y-b}{a}\right\}, & a < 0 \end{cases} = \begin{cases} F\left(\frac{y-b}{a}\right), & a > 0 \\ 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right), & a < 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{分布函数}} \xi$ 的分布函数

η 的密度函数 \rightarrow

$$q(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} p\left(\frac{y-b}{a}\right), & a > 0 \\ -\frac{1}{a} p\left(\frac{y-b}{a}\right), & a < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|} p\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad a \neq 0$$

二、单个随机变量的函数的分布

- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) \leq y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算。

$$q(y) = \frac{1}{|a|} p\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad a \neq 0$$

- ▶ **例**：设 ξ 的密度函数为 $p(x)$ ， $\eta = a\xi + b$ ($a \neq 0$)，求 η 的密度函数 $q(y)$ 。

$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2) \implies p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\eta \triangleq \frac{\xi - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \xi + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \implies q(y) = \frac{1}{|a|} p\left(\frac{y-b}{a}\right) = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{[\sigma(y+\frac{\mu}{\sigma}) - \mu]^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$N(0, 1)$ 的密度函数

$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

二、单个随机变量的函数的分布

- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) \leq y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算。

▶ **例**：设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，求 $\eta = e^\xi$ 的密度函数 $q(y)$ 。

$$\xrightarrow{\eta \text{ 的分布函数}} G(y) = P\{\eta \leq y\} = P\{e^\xi \leq y\} = \begin{cases} P\{\xi \leq \ln y\}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\eta \text{ 的密度函数}} q(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

- η 的对数 $\ln \eta = \xi$ 服从正态分布，故称 η 服从**对数正态分布**。
- 现代金融学利用**对数正态分布**作为资产价格分布，建立了十分漂亮且合理的理论。
- 此外，销售量、元器件的寿命等也普遍使用**对数正态分布**作为模型。

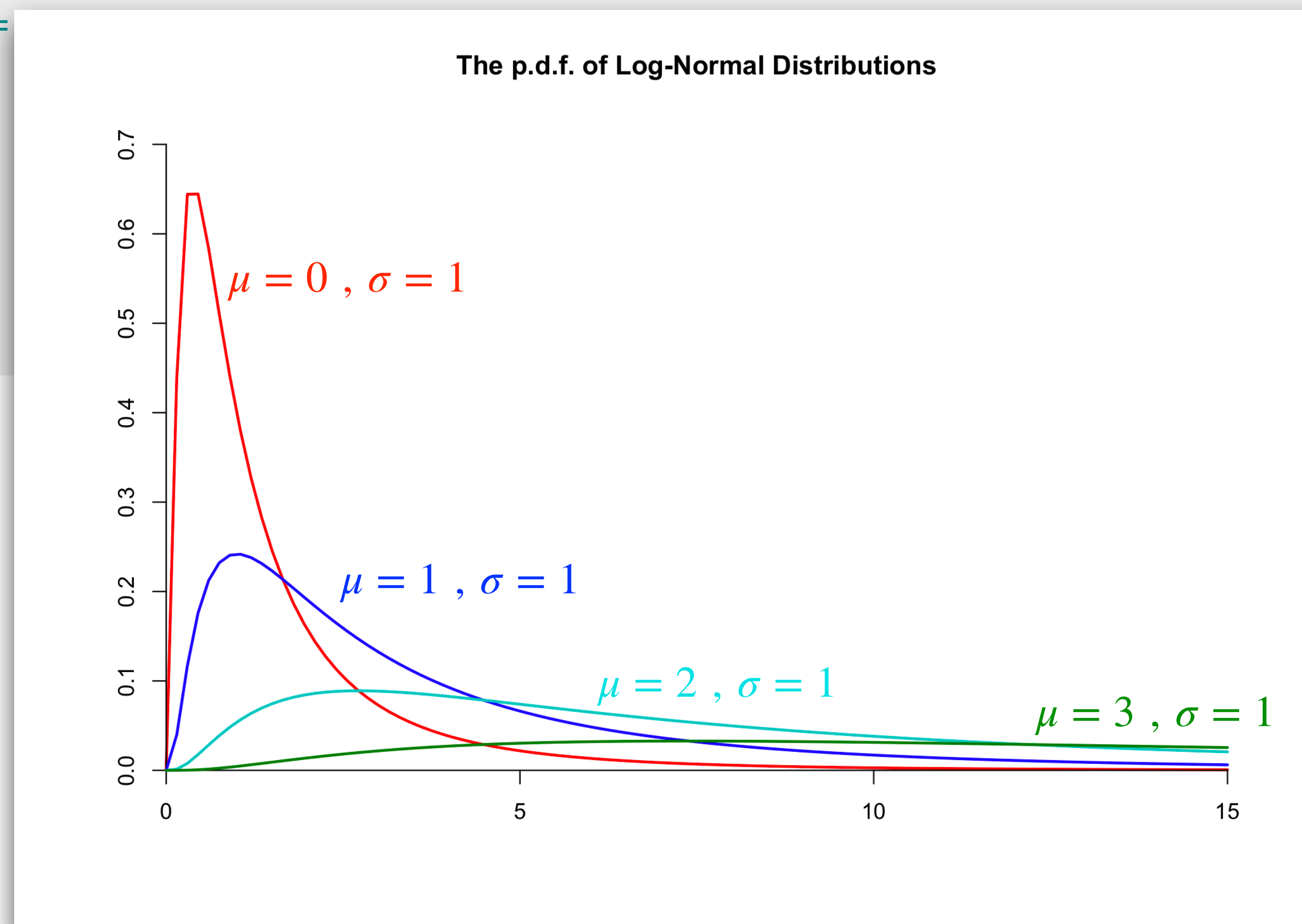
二、单个随机变量的函数的分布

- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) \leq y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算。

▶ **例**：设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，求 $\eta = e^\xi$ 的密度函数 $q(y)$ 。

$$q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, y > 0$$

```
curve(dlnorm(x, 0, 1), 0, 15, axes = FALSE, xlab = "", ylab = "", lwd = 2, col =
axis(1, pos = 0)
axis(2, pos = 0)
curve(dlnorm(x, 1, 1), 0, 15, add = TRUE, lwd = 2, col = 'blue')
curve(dlnorm(x, 2, 1), 0, 15, add = TRUE, lwd = 2, col = 'cyan3')
curve(dlnorm(x, 3, 1), 0, 15, add = TRUE, lwd = 2, col = 'green4')
title(main = 'The p.d.f. of Log-Normal Distributions')
```



二、单个随机变量的函数的分布

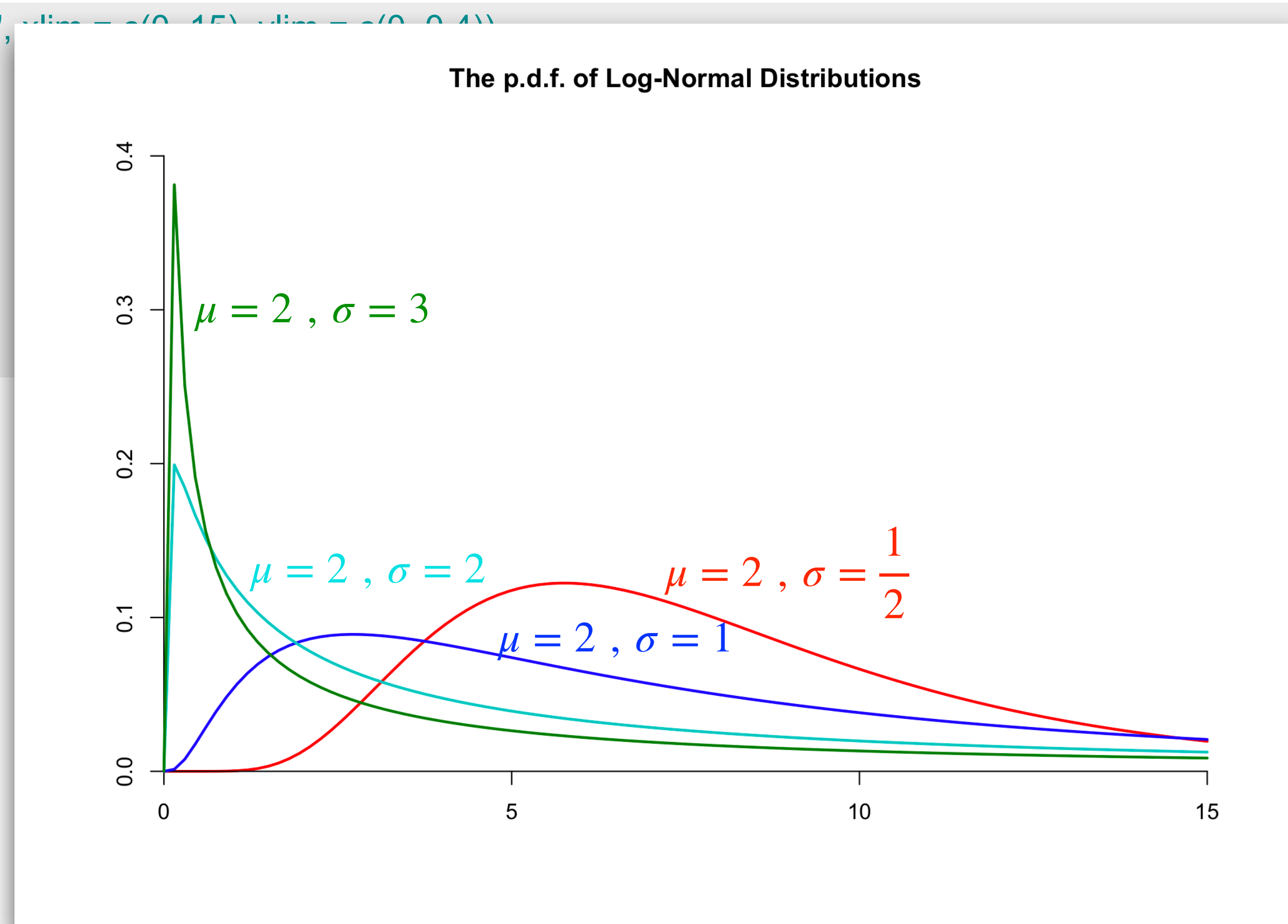
- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) \leq y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算。

▶ **例**：设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，求 $\eta = e^\xi$ 的密度函数 $q(y)$ 。

$$q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0$$

```

curve(dlnorm(x, 2, 1/2), 0, 15, axes = FALSE, xlab = "", ylab = "", lwd = 2, col = 'red', xlim = c(0, 15), ylim = c(0, 0.4))
axis(1, pos = 0)
axis(2, pos = 0)
curve(dlnorm(x, 2, 1), 0, 15, add = TRUE, lwd = 2, col = 'blue')
curve(dlnorm(x, 2, 2), 0, 15, add = TRUE, lwd = 2, col = 'cyan3')
curve(dlnorm(x, 2, 3), 0, 15, add = TRUE, lwd = 2, col = 'green4')
title(main = 'The p.d.f. of Log-Normal Distributions')
    
```



二、单个随机变量的函数的分布

- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) \leq y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算.

▶ **例**：设 $\xi \sim N(0, 1)$ ，求 $\eta = \xi^2$ 的密度函数 $q(y)$.

η 的分布函数 \rightarrow

$$G(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi^2 < y\} = \begin{cases} P\{-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

η 的密度函数 \rightarrow

$$q(y) = \frac{d}{dy} G(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

二、单个随机变量的函数的分布

- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) < y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算。

▶ **例**：设 $\xi \sim N(0, 1)$ ，求 $\eta = \xi^2$ 的密度函数 $q(y)$ 。

$$q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0$$

▶ χ_n^2 分布： $\xi \sim \chi_n^2$ ，称为自由度为 n 的 χ^2 分布，其密度函数为

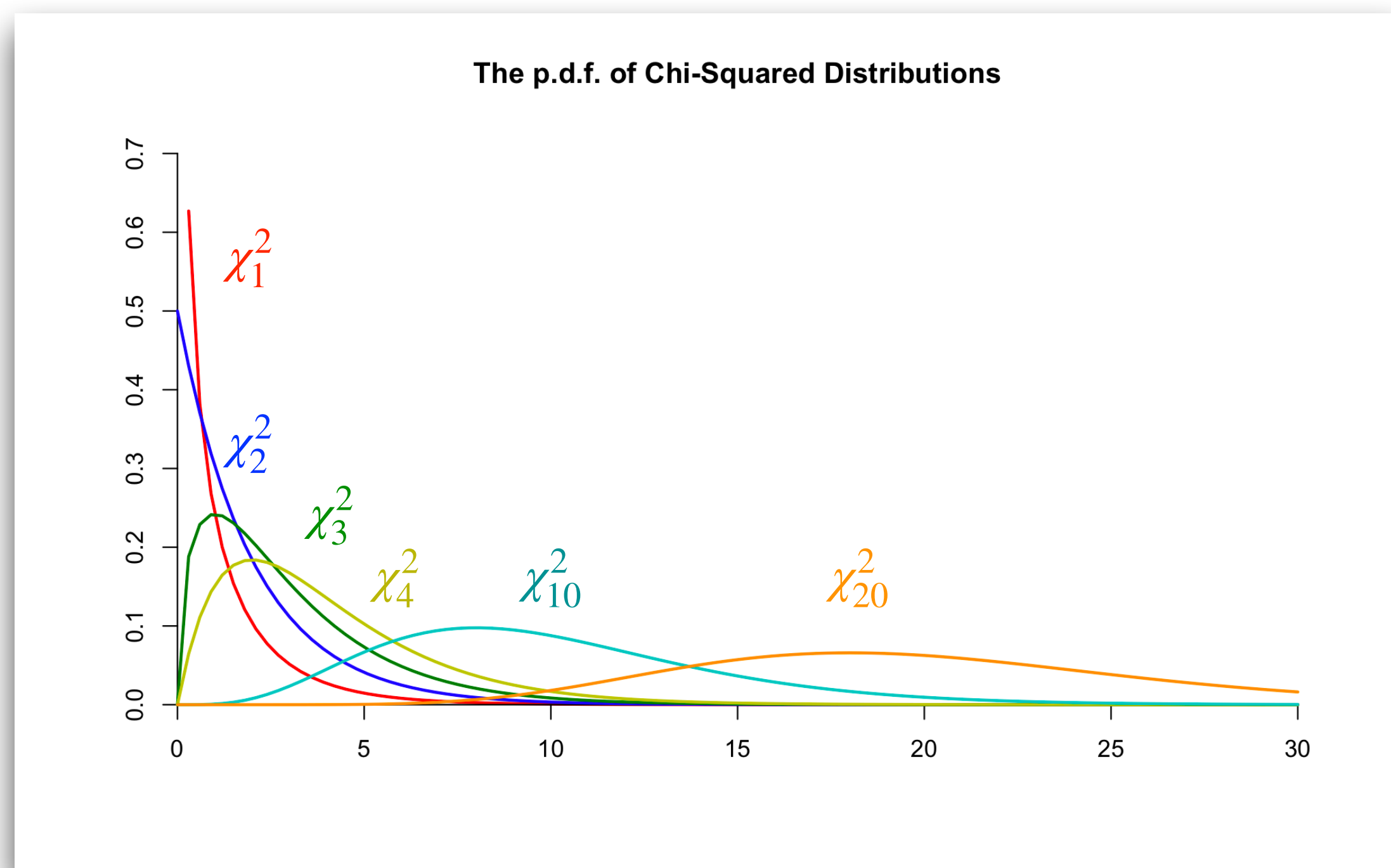
$$p(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

$n = 1$

```
curve(dchisq(x, 1), 0, 30, axes = FALSE, xlab = "", ylab = "", lwd = 2, col = 'red', xlim = c(0, 30), ylim = c(0, 0.7))
axis(1, pos = 0)
axis(2, pos = 0)
curve(dchisq(x, 2), 0, 30, add = TRUE, lwd = 2, col = 'blue')
curve(dchisq(x, 3), 0, 30, add = TRUE, lwd = 2, col = 'green4')
curve(dchisq(x, 4), 0, 30, add = TRUE, lwd = 2, col = 'yellow3')
curve(dchisq(x, 10), 0, 30, add = TRUE, lwd = 2, col = 'cyan3')
curve(dchisq(x, 20), 0, 30, add = TRUE, lwd = 2, col = 'orange')
title(main = 'The p.d.f. of Chi-Squared Distributions')
```

二、单个随机变量的函数的分布

- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) < y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算.
 - ▶ **例**：设 $\xi \sim N(0, 1)$ ，求 $\eta = \xi^2$ 的密度函数 $q(y)$.
 - ▶ χ_n^2 分布： $\xi \sim \chi_n^2$ ，称为自由度为 n 的 χ^2 分布，其密度函数为



$$p(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

二、单个随机变量的函数的分布

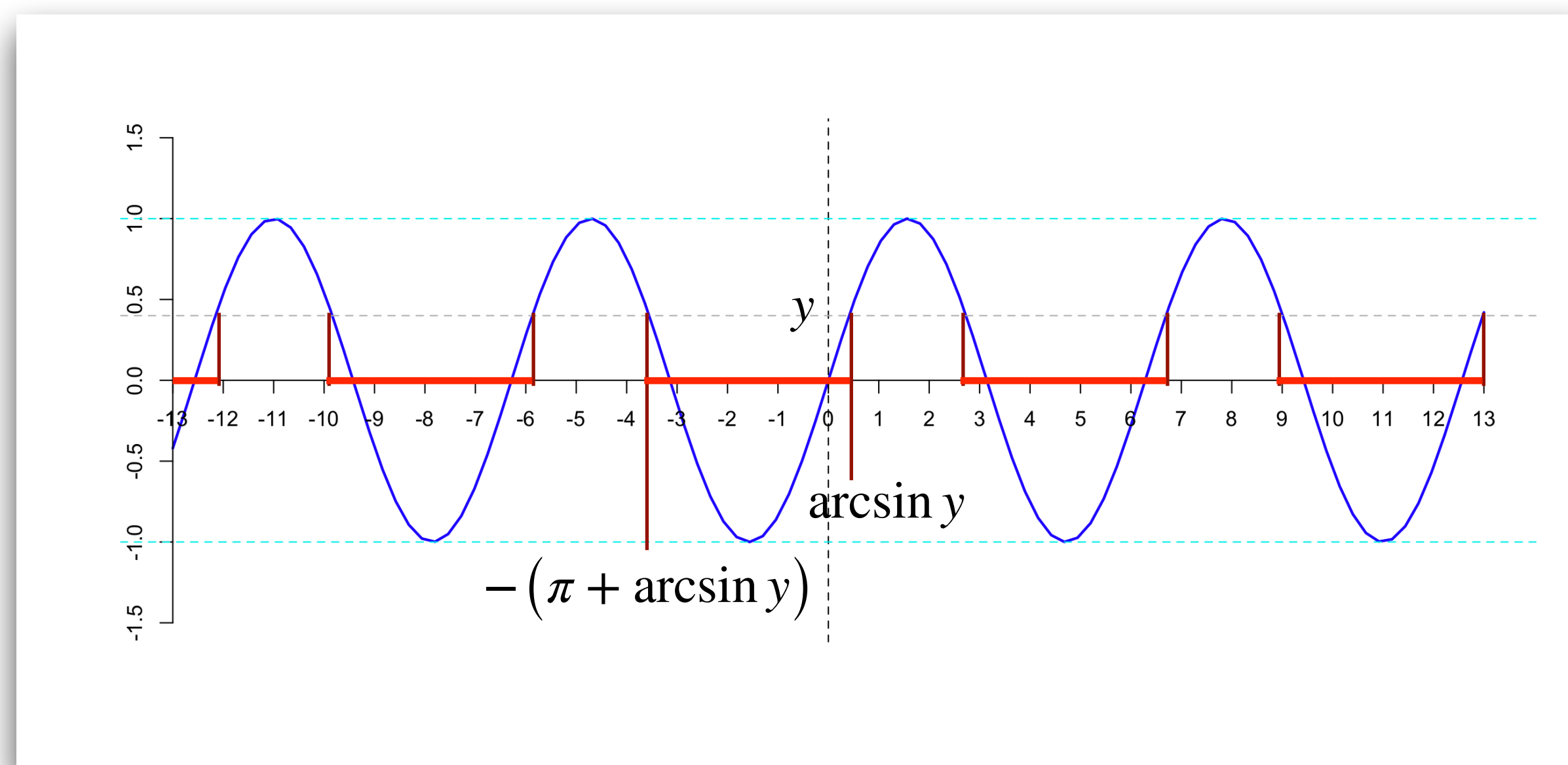
- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) < y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算。
 - ▶ **例**：设随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)$ ，求 $Y = \sin X$ 的概率分布。

Y 的分布函数 →

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\sin X < y\}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq -1 \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\{2k\pi - (\pi + \arcsin y) \leq X < 2k\pi + \arcsin y\}, & -1 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq -1 \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi - (\pi + \arcsin y)}^{2k\pi + \arcsin y} p_X(x) dx, & -1 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$



二、单个随机变量的函数的分布

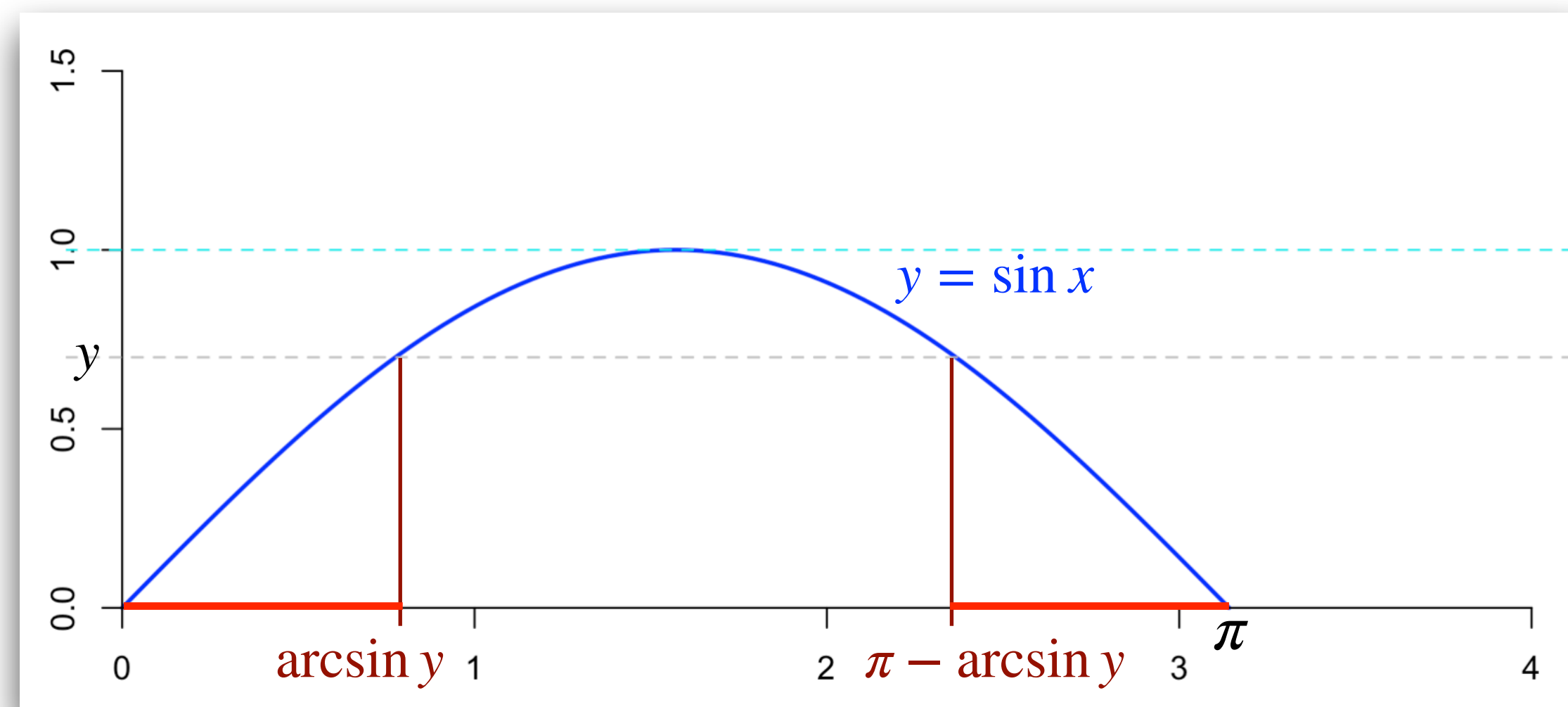
- **直接法**：将积分区域 $\{x : g(\xi) < y\}$ 直接化为 ξ 的等价事件进行计算.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -1 \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi - (\pi + \arcsin y)}^{2k\pi + \arcsin y} p_X(x) dx, & -1 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$
- ▶ **例**：设随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)$ ，求 $Y = \sin X$ 的概率分布.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{Y = \sin X} F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \int_0^{\arcsin y} \frac{2x}{\pi^2} dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} dx, & 0 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)^2 + 1 - \left(\frac{\pi - \arcsin y}{\pi}\right)^2, & 0 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases} \implies q(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



二、单个随机变量的函数的分布

- **变换法**：设 ξ 为连续型随机变量，密度函数为 $p(x)$ ，令 $\eta = g(\xi)$ ，求 η 的密度。

定理：若 $g(x)$ 严格单调，且反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续导函数，则 $\eta = g(\xi)$ 是具有密度函数为

$$p [g^{-1}(y)] \cdot \left| [g^{-1}(y)]' \right|$$

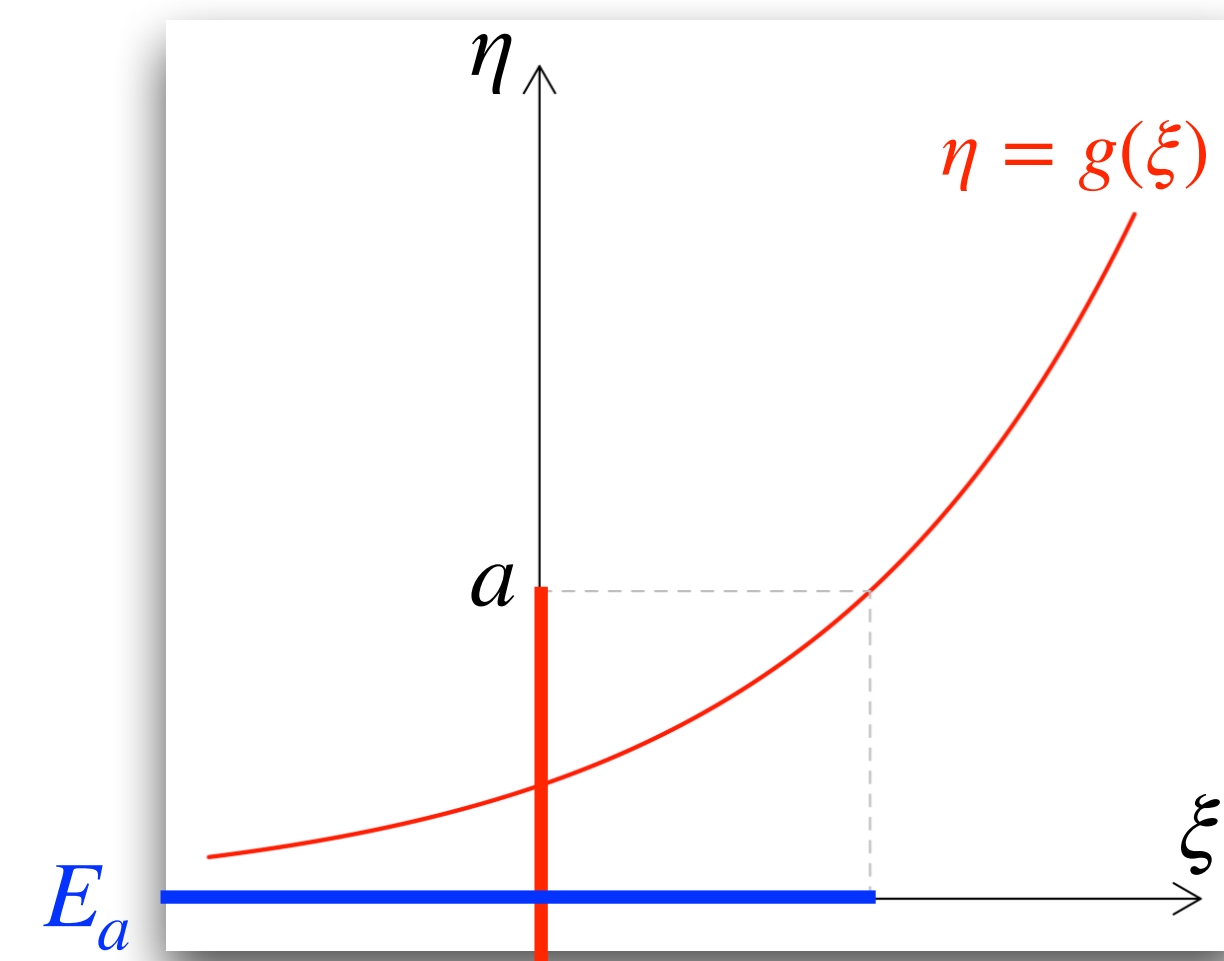
的连续型随机变量。

$$\forall a \in \mathbb{R}, E_a \triangleq \{x : g(x) < a\} \xrightarrow{\text{变量代换 } y = g(x)} x = g^{-1}(y)$$

$$\xrightarrow{\eta = g(\xi) \text{ 的分布函数}} P \{ \eta < a \} = P \{ g(\xi) < a \} = P \{ \xi \in E_a \} = \int_{E_a} p(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^a p [g^{-1}(y)] \cdot \left| [g^{-1}(y)]' \right| dy$$

$$\xrightarrow{\eta = g(\xi) \text{ 的密度函数}} \frac{d}{da} P \{ \eta < a \} = p [g^{-1}(a)] \cdot \left| [g^{-1}(a)]' \right|$$



二、单个随机变量的函数的分布

定理：若 $g(x)$ 严格单调，且反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续导函数，则 $\eta = g(\xi)$ 是具有密度函数为

$$p[g^{-1}(y)] \cdot |g^{-1}(y)'|$$

的连续型随机变量.

- **变换法**：设 ξ 为连续型随机变量，密度函数为 $p(x)$ ，令 $\eta = g(\xi)$ ，求 η 的密度.

- ▶ **例**：设连续型随机变量 ξ 的密度函数为 $p_\xi(x)$ ，定义 $\eta = a\xi + b$ ($a \neq 0$)，则 η 的密度为

$$p_\eta(y) = \frac{1}{|a|} \cdot p_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- $\xi \sim U(c, d)$, $a > 0$, 则 $\eta = a\xi + b \sim U(ac + b, ad + b)$.

$$p_\xi(x) = \frac{1}{d-c}, \quad c < x < d$$

$$\xrightarrow{\eta = a\xi + b} p_\eta(y) = \frac{1}{|a|} \cdot p_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{d-c} = \frac{1}{ad-ac}, \quad ac + b < y < ad + b$$

$$\implies \eta = a\xi + b \sim U(ac + b, ad + b)$$

二、单个随机变量的函数的分布

定理：若 $g(x)$ 严格单调，且反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续导函数，则 $\eta = g(\xi)$ 是具有密度函数为

$$p[g^{-1}(y)] \cdot |[g^{-1}(y)]'|$$

的连续型随机变量.

● **变换法**：设 ξ 为连续型随机变量，密度函数为 $p(x)$ ，令 $\eta = g(\xi)$ ，求 η 的密度.

▶ **例**：设连续型随机变量 ξ 的密度函数为 $p_\xi(x)$ ，定义 $\eta = a\xi + b$ ($a \neq 0$)，则 η 的密度为

$$p_\eta(y) = \frac{1}{|a|} \cdot p_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

○ $\xi \sim U(c, d)$, $a > 0$, 则 $\eta = a\xi + b \sim U(ac + b, ad + b)$.

○ $\xi \sim \Gamma(r, \lambda)$, $a > 0$, 则 $\eta = a\xi \sim \Gamma\left(r, \frac{\lambda}{a}\right)$.

$$p_\xi(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$\xrightarrow{\eta = a\xi} p_\eta(y) = \frac{1}{|a|} \cdot p_\xi\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \left(\frac{y}{a}\right)^{r-1} e^{-\lambda \cdot \frac{y}{a}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^r}{\Gamma(r)} y^{r-1} e^{-\frac{\lambda}{a} \cdot y}, \quad y > 0 \implies \eta = a\xi \sim \Gamma\left(r, \frac{\lambda}{a}\right)$$

二、单个随机变量的函数的分布

定理：若 $g(x)$ 严格单调，且反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续导函数，则 $\eta = g(\xi)$ 是具有密度函数为

$$p[g^{-1}(y)] \cdot \left| [g^{-1}(y)]' \right|$$

的连续型随机变量.

- **变换法**：设 ξ 为连续型随机变量，密度函数为 $p(x)$ ，令 $\eta = g(\xi)$ ，求 η 的密度.

- ▶ **例**：设连续型随机变量 ξ 的密度函数为 $p_\xi(x)$ ，定义 $\eta = a\xi + b$ ($a \neq 0$)，则 η 的密度为

$$p_\eta(y) = \frac{1}{|a|} \cdot p_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- $\xi \sim U(c, d)$, $a > 0$, 则 $\eta = a\xi + b \sim U(ac + b, ad + b)$.

- $\xi \sim \Gamma(r, \lambda)$, $a > 0$, 则 $\eta = a\xi \sim \Gamma\left(r, \frac{\lambda}{a}\right)$.

- $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a \neq 0$, 则 $\eta = a\xi + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\xrightarrow{\eta = a\xi + b} p_\eta(y) = \frac{1}{|a|} \cdot p_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |a| \sigma} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2a^2\sigma^2}}, \quad -\infty < y < +\infty \implies \eta = a\xi + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

二、单个随机变量的函数的分布

定理: 若 $g(x)$ 严格单调, 且反函数 $g^{-1}(y)$ 有连续导函数, 则 $\eta = g(\xi)$ 是具有密度函数为

$$p[g^{-1}(y)] \cdot |[g^{-1}(y)]'|$$

的连续型随机变量.

- 变换法: 设 ξ 为连续型随机变量, 密度函数为 $p(x)$, 令 $\eta = g(\xi)$, 求 η 的密度.

例: 设 $\xi \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 定义 $\eta = \tan \xi$, 则 η 的密度函数为

$\xi = \arctan \eta$ 有连续导函数

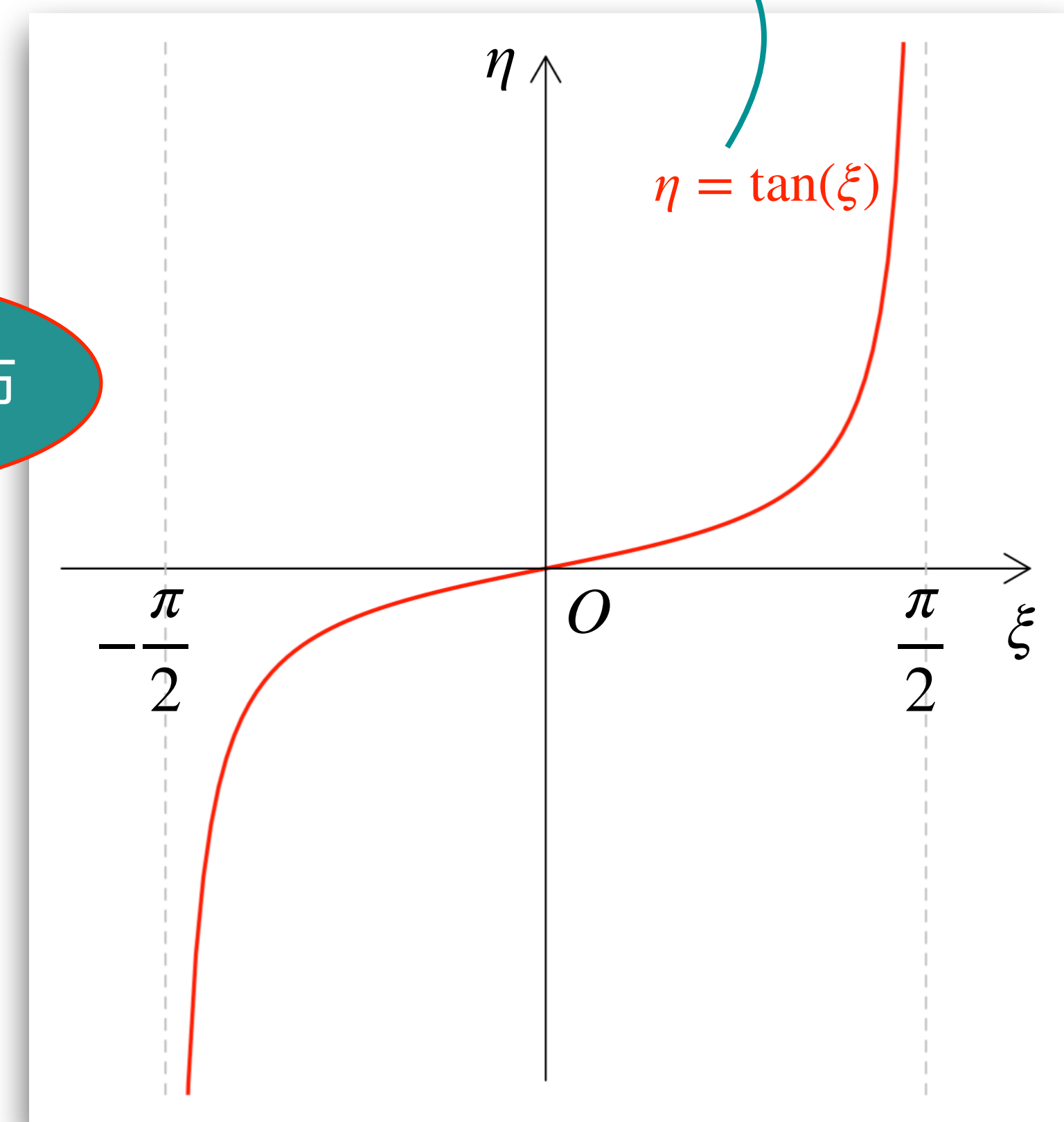
$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$p_{\eta}(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}, \quad -\infty < y < +\infty$$

$$\xrightarrow{\eta = \tan \xi} p_{\eta}(y) = p[g^{-1}(y)] \cdot |[g^{-1}(y)]'|$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}, \quad -\infty < y < +\infty$$

Cauchy 分布



二、单个随机变量的函数的分布

- **变换法**: 设 ξ 为连续型随机变量, 密度函数为 $p(x)$, 令 $\eta = g(\xi)$, 求 η 的密度.

定理: 若 $g(x)$ 在不相重叠的区间 I_1, I_2, \dots 上逐段严格单调, 且其反函数分别为 $h_1(y), h_2(y), \dots$, 而且反函数均有连续导数, 则 $\eta = g(\xi)$ 是连续型随机变量, 其密度函数为

$$p[h_1(y)] \cdot \left| [h_1(y)]' \right| + p[h_2(y)] \cdot \left| [h_2(y)]' \right| + \dots$$

$\forall a \in \mathbb{R}, E_i(a) \triangleq \{x : g(x) < a, x \in I_i\}, i = 1, 2, \dots \xrightarrow{I_1, I_2, \dots \text{ 不相重叠}} E_i(a) \text{ 互不相容}$

$\eta = g(\xi)$ 的分布函数 $\rightarrow P\{\eta < a\} = P\{g(\xi) < a\} = P\left\{\xi \in \bigcup_i E_i(a)\right\} = \sum_i P\{\xi \in E_i(a)\} = \sum_i \int_{E_i(a)} p(x) dx$

变量代换 $y = g(x), x = g^{-1}(y) = h(y) \rightarrow \sum_i \int_{-\infty}^a p[h_i(y)] \cdot |h_i'(y)| dy = \int_{-\infty}^a \sum_i p[h_i(y)] \cdot |h_i'(y)| dy$

$\eta = g(\xi)$ 的密度函数 $\rightarrow \frac{d}{da} P\{\eta < a\} = \sum_i p[h_i(a)] \cdot |h_i'(a)|$

二、单个随机变量的函数的分布

定理：若 $g(x)$ 在不相重叠的区间 I_1, I_2, \dots 上逐段严格单调，且其反函数分别为 $h_1(y), h_2(y), \dots$ ，而且反函数均有连续导数，则 $\eta = g(\xi)$ 是连续型随机变量，其密度函数为

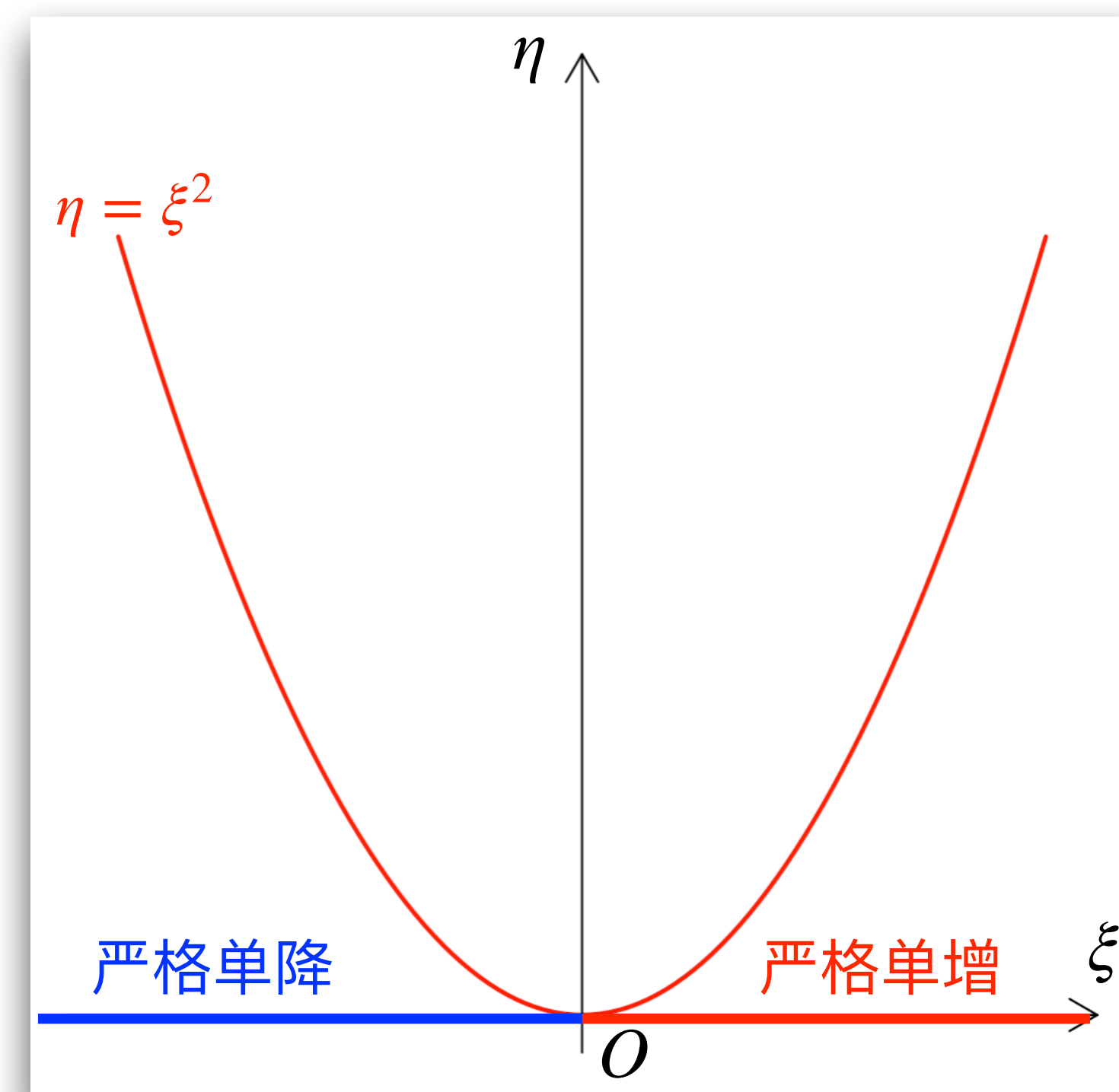
$$p[h_1(y)] \cdot \left| [h_1(y)]' \right| + p[h_2(y)] \cdot \left| [h_2(y)]' \right| + \dots$$

● **变换法：**设 ξ 为连续型随机变量，密度函数为 $p(x)$ ，令 $\eta = g(\xi)$ ，求 η 的密度。

▶ **例：**设 ξ 的密度函数为 $p_\xi(x)$ ，定义 $\eta = \xi^2$ ，则 η 的密度函数为

$$p_\eta(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[p_\xi(\sqrt{y}) + p_\xi(-\sqrt{y}) \right], \quad y > 0$$

$$\begin{aligned} p_\eta(y) &= p[h_1(y)] \cdot \left| [h_1(y)]' \right| + p[h_2(y)] \cdot \left| [h_2(y)]' \right| \\ &= p_\xi(-\sqrt{y}) \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + p_\xi(\sqrt{y}) \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[p_\xi(\sqrt{y}) + p_\xi(-\sqrt{y}) \right], \quad y > 0 \end{aligned}$$



二、单个随机变量的函数的分布

定理：若 $g(x)$ 在不相重叠的区间 I_1, I_2, \dots 上逐段严格单调，且其反函数分别为 $h_1(y), h_2(y), \dots$ ，而且反函数均有连续导数，则 $\eta = g(\xi)$ 是连续型随机变量，其密度函数为

$$p[h_1(y)] \cdot |h_1'(y)| + p[h_2(y)] \cdot |h_2'(y)| + \dots$$

● **变换法：**设 ξ 为连续型随机变量，密度函数为 $p(x)$ ，令 $\eta = g(\xi)$ ，求 η 的密度。

▶ **例：**设 ξ 的密度函数为 $p_\xi(x)$ ，定义 $\eta = \xi^2$ ，则 η 的密度函数为

$$p_\eta(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[p_\xi(\sqrt{y}) + p_\xi(-\sqrt{y}) \right], \quad y > 0$$

▶ **例：**设 $\xi \sim N(0, 1)$ ，计算 $\eta = \xi^2$ 的密度函数。

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\xrightarrow{\eta = \xi^2} p_\eta(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[p_\xi(\sqrt{y}) + p_\xi(-\sqrt{y}) \right] = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0$$

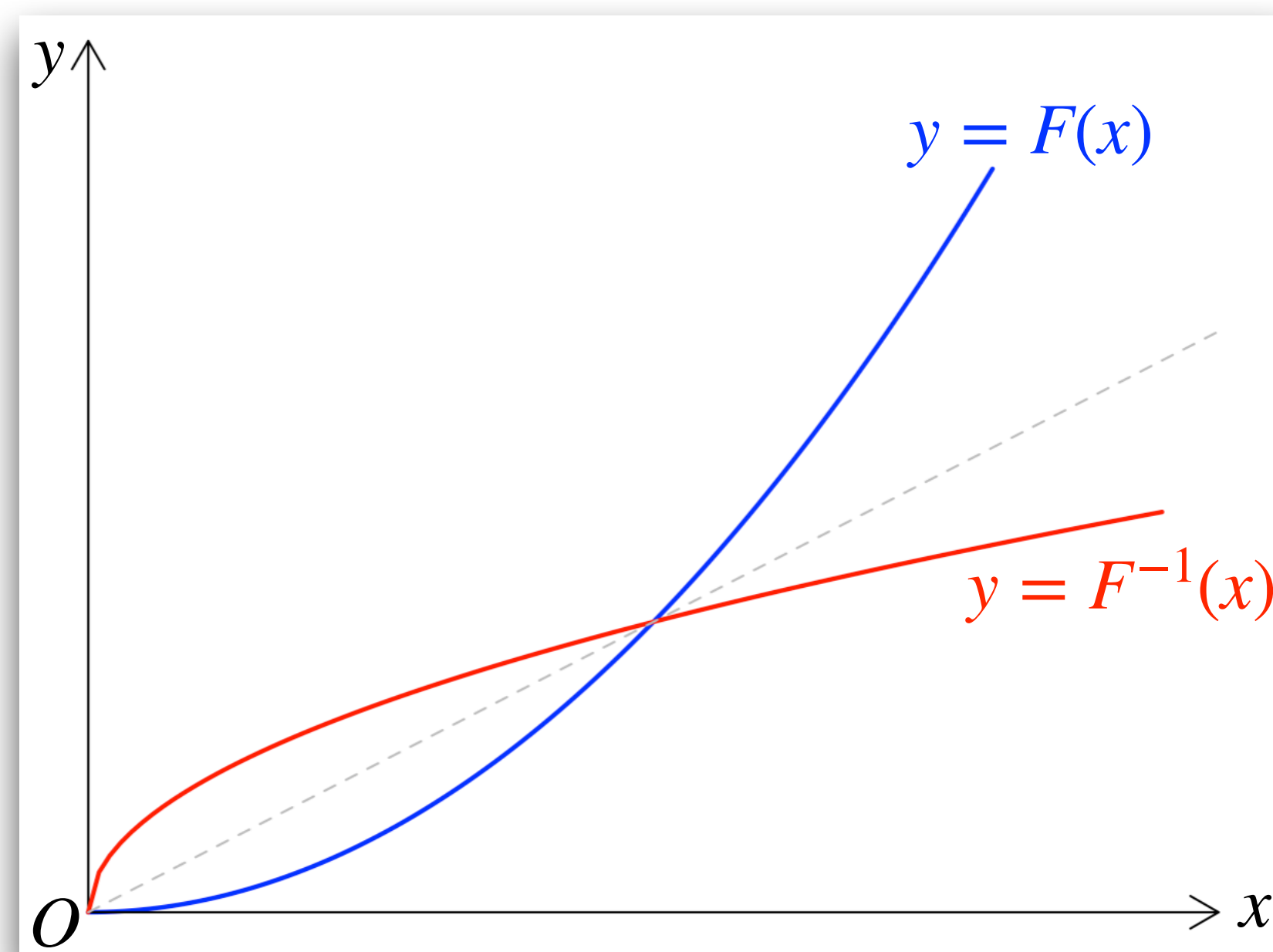
$\chi_1^2, \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

二、单个随机变量的函数的分布

- 均匀分布的应用

- ① 分布函数的单调逆函数

- \mathbb{R} 上严格单调的连续函数 $F(x)$ 都有唯一的反函数 $F^{-1}(x)$, 反函数与 $F(x)$ 有相同的单调性和连续性.



二、单个随机变量的函数的分布

- 均匀分布的应用

- ① 分布函数的单调逆函数

- 分布函数只有非降性和右连续性，需要将反函数的概念加以推广.

定义：若随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$ ， $\forall y \in [0, 1]$ ，定义

$$F^{-1}(y) = \inf \{x : F(x) > y\}$$

为分布函数 $F(x)$ 的单调逆函数.

二、单个随机变量的函数的分布

● 均匀分布的应用

① 分布函数的单调逆函数

性质 1: 当 $F(x)$ 是严格上升的连续函数时, 它的单调逆就是普通的反函数.

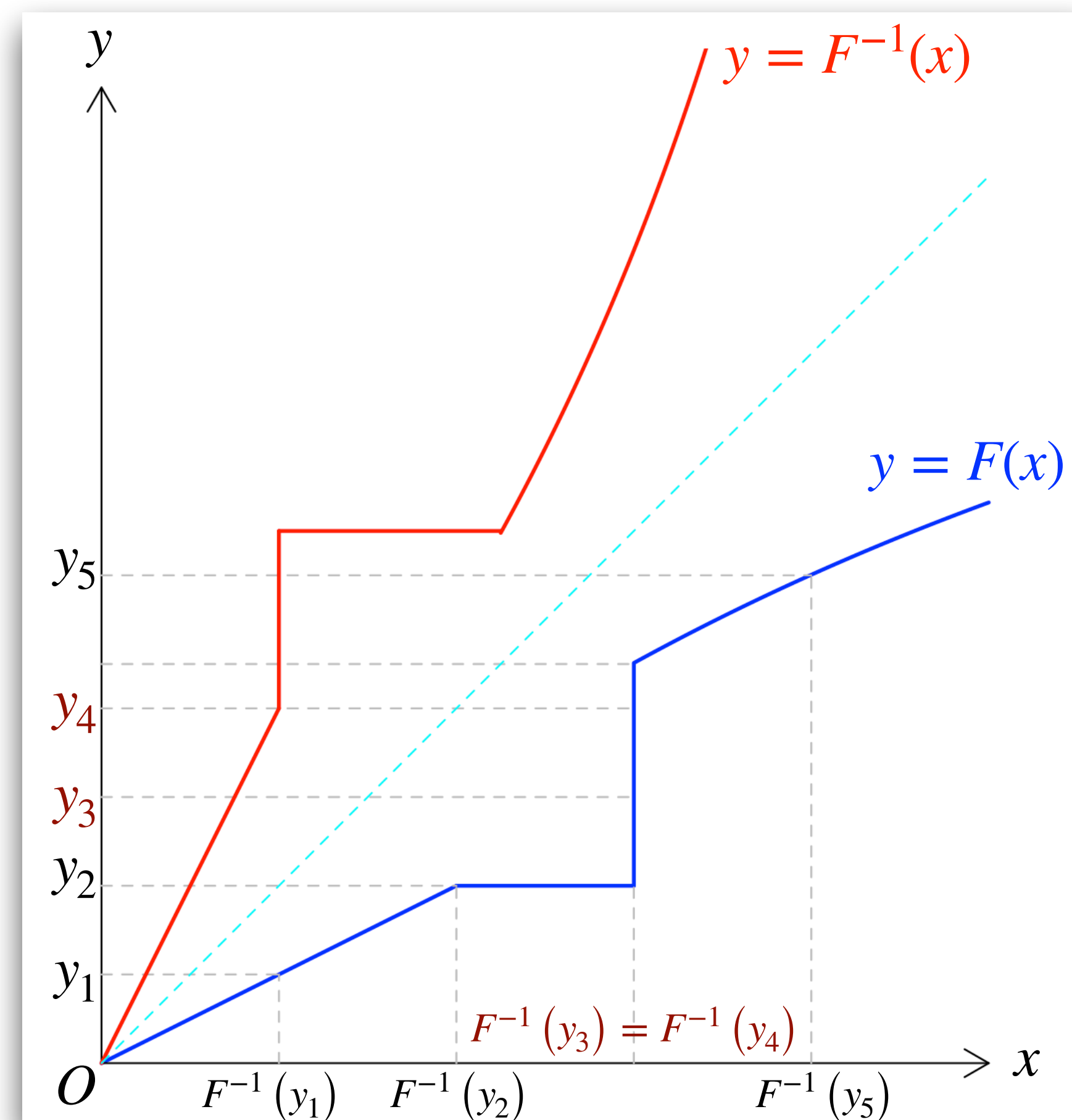
性质 2: 单调不降.

性质 3: $\forall y \in (0, 1)$ 都有 $F(F^{-1}(y)) \leq y$, 当 $F(x)$ 在点 $F^{-1}(y)$ 连续时等号成立, 反之不真.

定义: 若随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$, $\forall y \in [0, 1]$, 定义

$$F^{-1}(y) = \inf \{x : F(x) > y\}$$

为分布函数 $F(x)$ 的单调逆函数.



二、单个随机变量的函数的分布

● 均匀分布的应用

① 分布函数的单调逆函数

性质 4: $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $F^{-1}(F(x)) \geq x$, 严格不等号有时成立.

推论: $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 以及 $\forall y \in (0, 1)$, 有

$$(a) F^{-1}(y) \geq x \iff y \geq F(x).$$

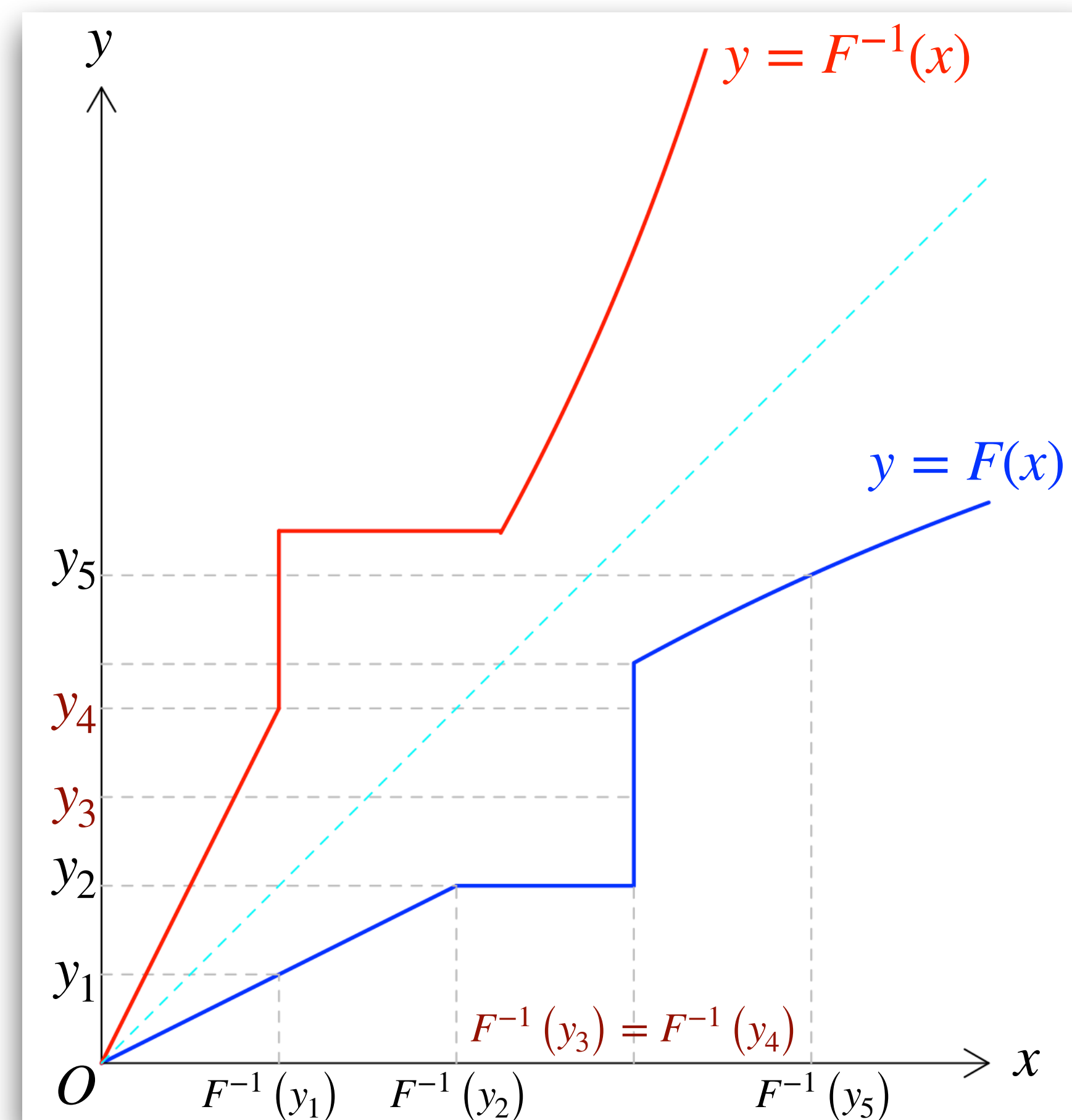
$$(b) F^{-1}(y) < x \iff y < F(x).$$

性质 5: $F^{-1}(y)$ 在任意点 $y \in (0, 1)$ 处均右连续.

定义: 若随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$, $\forall y \in [0, 1]$, 定义

$$F^{-1}(y) = \inf \{x : F(x) > y\}$$

为分布函数 $F(x)$ 的单调逆函数.



二、单个随机变量的函数的分布

- 均匀分布的应用

- ② 均匀分布的特殊地位

命题： 随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$ ，且 $F(x)$ 为连续函数，则 $\eta = F(\xi)$ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布.

$$\forall x \in [0, 1] \xrightarrow{\eta = F(\xi) \text{ 的分布函数}} P\{\eta < x\} = P\{F(\xi) < x\} = P\{\xi < F^{-1}(x)\} = F(F^{-1}(x)) = x$$

命题： $F(x)$ 为分布函数， η 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，则随机变量 $\xi = F^{-1}(\eta)$ 以 $F(x)$ 为分布函数.

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) \xrightarrow{\xi = F^{-1}(\eta) \text{ 的分布函数}} P\{\xi < x\} = P\{F^{-1}(\eta) < x\} = P\{\eta < F(x)\} = F(x)$$

- ▶ 只要能生成 $[0, 1]$ 上均匀分布的样本，通过 $\xi = F^{-1}(\eta)$ 即可得到分布函数为 $F(x)$ 的随机变量的样本.
- ▶ Monte Carlo: 利用数学或物理的方法产生 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数，再由 $\xi = F^{-1}(\eta)$ 即可得到任意分布 $F(x)$ 的随机数.

二、单个随机变量的函数的分布

- 随机变量的存在性定理

定理：若 $F(x)$ 是右连续的单调不降函数，且 $F(-\infty) = 0$ ， $F(+\infty) = 1$ ，则存在一个概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 及其上的随机变量 $\xi(\omega)$ ，使 $\xi(\omega)$ 的分布函数正好是 $F(x)$ 。